Feuille d'exercices numéro 9 Variables aléatoires discrètes Corrigé/Indications

I Discret fini

Partie A Sans variable[1]

1. a) Idée : note E_n l'ensemble des mots de n lettres tirées dans $\{P, F\}$ qui ne contiennent pas deux P successifs. Examiner ensuite les mots qui finissent par P ou par F : il y en a exactement f_{n-2} qui finissent par P car ceux-ci doivent terminer par "FP"

   b) $f_1 = 2$: tous les mots d'une lettre de $\{F, P\}$ conviennent. On a sune suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 = x + 1$. L'étude complete finit par donner :

$$f_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

   c) Il y a 2^n suites de jets possibles. La probabilité cherchée est (calcul fait à la main ou avec Python) $\dfrac{f_{10}}{2^{10}} = \dfrac{144}{1024} \simeq 0{,}14$

2. a) $d_1 = 0$, $d_2 = 1$.

   b) On a n choix pour l'occupant de la case $n+1$. Supposons (tous les cas sont symétriques) que ce soit n. Il faut maintenant déranger $1, 2, \ldots, n-1, n+1$ dans $1, 2, \ldots, n$. Deux cas sont alors possibles. D'une part, la case n est

[1] Ou presque

occupée par $n+1$, il reste alors à déranger $1, 2, \dots n-1$ dans $1, 2, \dots n-1$, ce qui nous donne d_{n-1} cas. D'autre part, $n+1$ n'occupe pas la case n, dans ce cas la, tout se passe comme si on remplaçait (virtuellement) le numéro $n+1$ par n' et on va donc déranger $1, 2, \dots, n-1, n'$ parmi $1, 2, \dots, n-1, n'$, d'où d_n possibilités.

c) Par récurrence : $d_{n+1} - (n+1)d_n = nd_n + nd_{n-1} - (n+1)d_n = -(d_n - nd_{n+1})$...

d) Par récurrence sur n à l'aide de la formule précédente : $d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$. Le $(-1)^{n+1}$ étant en fait $(n+1)! \cdot \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

e) On a donc $\dfrac{d_n}{n!} \longrightarrow e^{-1}$.

3. On introduit un troisième événement C, de probabilité $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ tel que (A, B, C) soit un système complet d'événements. On note de plus A_n l'événement « A est réalisé à la n^{e} répétition » (idem pour B_n, C_n). On a donc :

$$F = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \big(C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{n-1} \cap A_n\big)$$

car F est bien « pas de B avant un A ». La probabilité cherchée est donc :

$$\mathbb{P}(F) = \frac{\alpha}{1-\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

4. On note p la probabilité qu'un moteur tombe en panne et on introduit deux variables aléatoires $N_A \hookrightarrow \mathcal{B}(2, p)$ et $N_B \hookrightarrow \mathcal{B}(4, p)$.
L'avion A est plus fiable que B si $\mathbb{P}(N_A \leq 1) \geq \mathbb{P}(N_B \leq 2)$

Partie B Jeux d'urne

5. Faire un arbre...

6. On note A et B les numéros boules tirées de la première et de la seconde. Faire le tableau de la loi conjointe et indiquer dans chaque case la valeur de (X, Y). Dans les marges donner les lois de X et Y.

7. Même principe que ci dessus...

8. A priori $\mathbb{P}(X_1 = 2) > 0$ et $\mathbb{P}(X_2 = 1) > 0$. Mais $(X_1, X_2) = (2, 1)$ est impossible...

9. Il y a $n(n-1)/2$ tirages équiprobables possibles. $\mathbb{P}((X, Y) = (k, \ell))$ est nul si $k \geq \ell$ et vaut $\dfrac{2}{n(n+1)}$ sinon...

10. a) Faire un arbre, puis le tableau de la loi conjointe.
    b) Lire le tableau précédent.
    c) La valeur prise par S_2 donne le contenu de l'urne et permet donc de trouver la loi de X_3.
    d) Faire une récurrence. S'inspirer de la question précédente.

Partie C Autres cadres

11. a) Faire un arbre. $X_n(\Omega) = \{1, n+1\}$. $\mathbb{E}(X_n) = q^n + (n+1)(1-q^n)$.
    b) On veut donc $\mathbb{E}(X_n) \leq n$

12.

II Discret infini

13. Un dé équilibré a six faces. Deux des faces sont numérotées 0 et les quatre autres sont numérotées 1.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux zéros successifs pour la première fois. On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

a) Montrer que

$$p_n = \frac{2}{27}\left(1 - \sum_{k=0}^{n-3} p_k\right).$$

b) Déterminer une relation liant p_n, p_{n-1} et p_{n-3}.

c) Déterminer p_1, p_2 et p_3.

d) Déterminer p_n en fonction de n (long et douloureux. . .). Pour cela on pourra commencer par chercher les suites géométriques vérifiant la relation trouvée dans la question précédente. On remarquera que la suite géométrique de raison $1/3$ vérifie cette relation.

14. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{\alpha}{(1 + i + j)!}.$$

a) Déterminer α. X et Y sont-elles indépendantes ?

b) Déterminer la loi et l'espérance de $S = X + Y$.

15. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

a) Trouver $a \in \mathbb{R}$ pour que :

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y = k\}) \\ &= \begin{cases} a\lambda^n e^{-\lambda} \dfrac{p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } n < k \end{cases} \end{aligned}$$

soit une loi de probabilité conjointe.

b) Déterminer les lois marginales.
c) X et Y sont elles indépendantes ?
d) On pose $Z = X - Y$. Quelle est la loi de Z ?
e) Y et Z sont elles indépendantes ?

16. Paulot le ripoux attend nonchalamment accoudé à la portière de sa voiture de police. Il attend le passage d'un cave pour le racketter en lui établissant une fausse contravention. Le nombre N de voitures qu'il laisse passer avant de tomber sur un cave est une variable aléatoire dont la loi de probabilité vérifie, p étant un réel fixé dans $]0,1[$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N = k) = p \times \mathbb{P}(N \geq k).$$

a) Déterminer la loi de N.
b) Calculer $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{V}(N)$.

17. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k) - n\mathbb{P}(X \geq n+1).$$

b) Montrer que si X admet une espérance alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n\mathbb{P}(X \geq n+1) = 0.$$

c) En déduire que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X \geq k)$ converge et que dans ce cas, on a : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$.

18. *Loi de Pascal.* On procède à une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. On note T_r la variable égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le r$^{\text{ème}}$ succès.

a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par T_r ?

b) Quelle est la loi de T_r ?

c) Calculer la fonction génératrice, l'espérance et la variance de T_r.

19. *Loi binomiale négative.* On procède à une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. On note W_r la variable égale au nombre d'échecs précédant le r$^{\text{ème}}$ succès.

a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par W_r ?

b) Quelle est la loi de W_r ?

c) Calculer la fonction génératrice, l'espérance et la variance de W_r.

d) Exprimer W_r en fonction de la variable aléatoire T_r de l'exercice précédent.