Feuille d'exercices numéro 10 Variables aléatoires discrètes

I Discret fini

Partie A Sans variable[1]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n le nombre de possibilités d'obtenir n jets sans obtenir deux piles consécutifs. On convient que $f_0 = 1$.
   a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Indication : On pourra examiner le dernier jet.
   b) Que vaut f_1 ? Déterminer f_n en fonction de n.
   c) Calculer la probabilité d'obtenir 10 jets sans deux piles consécutifs ave une pièce de monnaie équilibrée.
2. On note d_n le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$. C'est le nombre de façons de classer les nombre de $[\![1, n]\!]$ de telle sorte à ce qu'aucun d'entre eux ne soit à sa place. On conviendra que $d_0 = 1$.
   a) Que valent d_1 et d_2 ?
   b) (**) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.
   c) En déduire que $d_n - nd_{n-1} = (-1)^n$.
   d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
   e) En déduire $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{d_n}{n!}$.

[1] Ou presque

3. On considère une épreuve aléatoire $\mathcal{E}$. Soient A et B deux événements incompatibles correspondant à cette épreuve. On suppose que $\mathbb{P}(A) = \alpha$ et $\mathbb{P}(B) = \beta$. On répète indéfiniment $\mathcal{E}$ et on note F l'événement « A se réalise avant B ». Quelle est la valeur de $\mathbb{P}(F)$?
4. Soient A et B deux avions ayant respectivement 2 et 4 moteurs. Chaque moteur a une probabilité p de tomber en panne et les moteurs sont indépendants les uns des autres.
   Un avion s'écrase quand plus de la moitié de ses moteurs tombent en panne. Lequel des deux avions choisir ?

Partie B Jeux d'urne

5. On considère une urne contenant une boule blanche, deux boules rouges et trois boules noires. On effectue des tirages jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que des boules de deux couleurs différentes. On note N la variable aléatoire donnant le nombre de tirages effectués. Déterminer la loi de N ainsi que ses moments.
6. On considère deux urnes avec dans chacune 4 boules numérotées 1 à 4. On tire une boule dans chaque et on classe les boules en fonction de leur numéro $X < Y$. Calculer la loi de X, de Y et de (X, Y).
7. *Une urne de plus !* On considère trois urnes avec dans chacune 4 boules numérotées 1 à 4. On tire une boule dans chaque et on classe les boules en fonction de leur numéro $X < Y < Z$. Calculer la loi de X, de Y, de Z et de (X, Y, Z).
8. *Plein de boules !!* On considère deux urnes contenant des boules numérotés de 1 à n. On en tire une dans chaque urne. Soit X_1 le plus petit numéro et X_2 le plus grand. Loi de (X_1, X_2), lois marginales. Sans faire de calculs, y a-t-il indépendance ?

9. On dispose d'un urne contenant $n-2$ boules noires et 2 boules blanches et on fait des tirages sans remise. On considère les variable aléatoire X et Y prenant respectivement le rang de la première boule blanche et celui de la deuxième. Calculer les lois de X, Y, (X,Y) ainsi que les espérances de X, Y, XY.

10. *Autres couleurs, autres règles...* Une urne contient r boules rouges et b boules blanches. À chaque tirage on remet c boules de la couleur tirée dans l'urne (en plus de la boule tirée). Soit X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée au n^{e} tirage est blanche, 0 sinon.
    a) Déterminer la loi de (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 et la comparer à celle de X_1.
    b) Trouver la loi de la variable aléatoire $S_2 = X_1 + X_2$.
    c) Pour chaque valeur possible de k calculer les probabilités conditionnelles de X_3 sachant que $S_2 = k$. En déduire que la loi de X_3 est la même que celle de X_1.
    d) (*) Montrer que toutes les variables aléatoires X_n ont même loi.

Partie C Autres cadres

11. *Méthode du poolage version simple* : des vaches laitières sont atteintes d'une maladie M (p. ex. salmonellose...) avec une probabilité p. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches on fait une analyse de lait ; on peut procéder de deux manières différentes.

    1re méthode : On effectue une analyse sur un échantillon du lait de chaque vache.

    2e méthode : On effectue une analyse sur un échantillon du mélange de chacune des n vaches (*poolage*) et si le résultat est positif on effectue une analyse sur un échantillon du lait de chaque vache.

Soit X_n le nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode.

a) Déterminer la loi et l'espérance de X_n.

b) Montrer que la seconde méthode est en moyenne plus avantageuse que la première si et seulement si[2] $\ln n + n \ln q > 0$.

12. Soit X prenant les valeurs -1 et 1 avec une probabilité de $1/2$. soit Y prenant les valeurs -1 et 2 avec une probabilité $2/3$ et $1/3$.

a) Calculer les moments de X et Y.

b) On note $p = \mathbb{P}(X = Y = -1)$. Trouver la loi conjointe de (X, Y). En déduire un encadrement de p.

c) Trouver le coefficient de corrélation de (X, Y) en fonction de p.

d) Peut-il exister deux réels α et β pour lesquels $Y = \alpha X + \beta$. On discutera selon p.

13. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

a) Donner les lois de $X + Y$ et $X - Y$.

b) Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

14. Soient X et Y deux variables aléatoires ayant une espérance et une variance. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X) & \mathrm{Cov}(X, Y) \\ \mathrm{Cov}(X, Y) & \mathbb{V}(Y) \end{pmatrix}.$$

a) Calculer ${}^tMAM$ et l'exprimer sous la forme d'une variance.

b) En déduire les matrices M pour lesquelles ${}^tMAM = 0$

[2] $q = 1 - p$ comme d'habitude... Vive Cloclo ! ! !

c) Trouver une condition suffisante et nécessaire portant sur le coefficient de corrélation de (X,Y) pour que A soit inversible.

15. On considère 4 dés à 6 faces non pipés. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de faces distinctes. Donner la loi de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

16. On lance 2 dés non pipés. Soit T la somme des points obtenus. Soit X le reste de la division de T par 2 et Y celui de T par 5.

    a) Donner la loi conjointe de (X,Y).

    b) Donner les lois marginales de X et de Y.

    c) X et Y sont-elles indépendantes ?

17. Soient A et B deux événements tel que $\mathbb{P}(A) = a$ et $\mathbb{P}(B) = b$. Soit $\mathbf{1}_A$ (resp. $\mathbf{1}_B$) l'indicatrice de A, c'est-à-dire la variable aléatoire telle que $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ (resp. $\mathbf{1}_B(\omega) = 1$) si $\omega \in A$ (resp. $\omega \in B$), 0 sinon. Donner en fonction du nombre $x = \mathbb{P}(A \cap B)$ le coefficient de corrélation ρ du couple $(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$. Tracer le graphe de ρ en fonction de x.

18. Soient X et Y deux variable aléatoire discrètes telles que :

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = m \qquad (m \neq 0) \\ \mathbb{V}(X) = \sigma_1^2, \quad \mathbb{V}(Y) = \sigma_2^2 \\ \operatorname{Cov}(X,Y) = \mu, \qquad \mathbb{V}(X-Y) \neq 0\end{array}\right.$$

    Soit $Z = aX + bY$. Déterminer a et b pour que $\mathbb{E}(Z) = m$ et $\mathbb{V}(Z)$ soit minimale.

19. Soient X et Y deux variable aléatoire admettant des variances $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$. On pose $Z = X + Y$ et $T = X - Y$. Montrer que si Z et T sont indépendantes alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y)$. La réciproque est-elle vraie ? On pourra voir l'exercice qui suit.

20. On suppose que X et Y sont indépendantes, de même loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$. On pose (toujours) $Z = X + Y$ et $T = X - Y$.
    a) Calculer $\mathbb{V}(X)$. que vaut $\mathbb{V}(Y)$?
    b) Déterminer les lois de Z et T. Le couple (Z, T) est il indépendant ?
21. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales de paramètres respectifs $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(n', p)$. Quelle est la loi de X sachant $X + Y = k$?
22. On suppose que le nombre N de graines semées suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On suppose que chaque graine a une probabilité γ de produire un plant. On note S le nombre de plants (i.e. de graines qui ont germé).
    a) Calculer $P(S = j \mid N = i)$ pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.
    b) Quelle est la loi conjointe de (N, S) ?
    c) Quelle est la loi de S ?
    d) Calculer $P(N = i \mid S = j)$ pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.
23. Un fumeur dispose de n allumettes. Chacune de ces allumettes a une probabilité p d'allumer la pipe de ce fumeur impénitent.
    a) Quelle est la probabilité que ce fumeur arrive à allumer sa pipe avant d'avoir vidé la boite d'allumettes ?
    b) On note N le nombre d'allumettes utilisées au cours de la tentative d'allumage. Déterminer la loi de N, puis son espérance et sa variance. Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{E}(N)$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{V}(N)$.
24. On lance n dés. Soit X le nombre de 6 obtenus. On lance alors $n - X$ dés (ceux qui étaient différents de 6 après le premier tirage). Soit alors Y le nombre de 6 obtenus.
    a) Déterminer les lois de X et de Y. X et Y sont elles indépendantes ?
    b) On pose $S = X + Y$. Quelle est la loi de S ?

25. Le jour de l'ouverture de la chasse, Tartarin ratisse les bois en tenue léopard en tirant sur tout ce qui bouge. Quand il tire il atteint :

    - Un promeneur qui ramasse des champignons avec une probabilité $p_1 = 0,04$.
    - Une vache qui broute avec une probabilité $p_2 = 0,1$.
    - Un chêne dont le bois sera endommagé avec une probabilité $p_3 = 0,1$.
    - Un chien avec une probabilité de $0,06$.
    - Un autre chasseur avec une probabilité de $0,05$.
    - Un raton-laveur avec une probabilité de $0,01$.

    On suppose qu'il tire n fois. On note X_1, X_2 et X_3 les nombres respectifs de promeneurs, vaches et chênes touchés par tartarin.
    a) Établir la loi de X_1, X_2 et X_3.
    b) Établir la loi du couple (X_1, X_2).
    c) Le nombre de coups de fusil de Tartarin suit une loi de Poisson de paramètre m. On note N le nombre de promeneurs abattus. Quelle est la loi de N ?

26. On tire une suite de $2n$ expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes ayant chacune une probabilité p de réussir.
    Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur 0 si aucun succès n'a été enregistré et i si le premier succès a été enregistré à la $i$ème épreuve.
    a) Quelle est la loi de X ? Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
    On note Y la variable aléatoire prenant la valeur j si pour la première fois les résultats de la j^{e} et de la $(j-1)^{\text{e}}$ épreuve sont identiques et la valeur 0 si deux épreuves successives n'ont jamais eu le même résultat.

b) Loi de Y, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$?

c) X et Y sont elles indépendantes ?

II Discret infini

27. Un dé équilibré a six faces. Deux des faces sont numérotées 0 et les quatre autres sont numérotées 1.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux zéros successifs pour la première fois. On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.
a) Montrer que
$$p_n = \frac{2}{27}\left(1 - \sum_{k=0}^{n-3} p_k\right).$$
b) Déterminer une relation liant p_n, p_{n-1} et p_{n-3}.
c) Déterminer p_1, p_2 et p_3.
d) Déterminer p_n en fonction de n (long et douloureux...). Pour cela on pourra commencer par chercher les suites géométriques vérifiant la relation trouvée dans la question précédente. On remarquera que la suite géométrique de raison $1/3$ vérifie cette relation.

28. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que
$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{\alpha}{(1 + i + j)!}.$$
a) Déterminer α. X et Y sont-elles indépendantes ?
b) Déterminer la loi et l'espérance de $S = X + Y$.

29. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

a) Trouver $a \in \mathbb{R}$ pour que :

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= \mathbb{P}(\{X = n\} \cap \{Y = k\}) \\ &= \begin{cases} a\lambda^n e^{-\lambda} \dfrac{p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } n < k \end{cases} \end{aligned}$$

soit une loi de probabilité conjointe.

b) Déterminer les lois marginales.

c) X et Y sont elles indépendantes ?

d) On pose $Z = X - Y$. Quelle est la loi de Z ?

e) Y et Z sont elles indépendantes ?

30. Paulot le ripoux attend nonchalamment accoudé à la portière de sa voiture de police. Il attend le passage d'un cave pour le racketter en lui établissant une fausse contravention. Le nombre N de voitures qu'il laisse passer avant de tomber sur un cave est une variable aléatoire dont la loi de probabilité vérifie, p étant un réel fixé dans $]0, 1[$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N = k) = p \times \mathbb{P}(N \geq k).$$

a) Déterminer la loi de N.

b) Calculer $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{V}(N)$.

31. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geq k) - n\mathbb{P}(X \geq n + 1).$$

b) Montrer que si X admet une espérance alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n\mathbb{P}(X \geq n + 1) = 0.$$

c) En déduire que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X \geq k)$ converge et que dans ce cas, on a : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$.

32. *Loi de Pascal.* On procède à une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. On note T_r la variable égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le r$^{\text{ème}}$ succès.
 a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par T_r ?
 b) Quelle est la loi de T_r ?
 c) Calculer la fonction génératrice, l'espérance et la variance de T_r.

33. *Loi binomiale négative.* On procède à une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. On note W_r la variable égale au nombre d'échecs précédant le r$^{\text{ème}}$ succès.
 a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par W_r ?
 b) Quelle est la loi de W_r ?
 c) Calculer la fonction génératrice, l'espérance et la variance de W_r.
 d) Exprimer W_r en fonction de la variable aléatoire T_r de l'exercice précédent.