Feuille d'exercices numéro 12 Variables aléatoires discrètes compléments

I Lois classiques

1. Une compagnie a en moyenne 4% de désistement par avion. Pour un avion de 73 places, elle vend 75 billets. Quelle est la probabilité d'avoir plus de voyageurs que de places.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = (-1)^X$ où X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On note $T = \max(X, Y)$ et $Z = \min(X, Y)$. Calculer les lois de (X, T) et (X, Z)

4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p. On définit la variable aléatoire Y par $Y = X/2$ si X est pair, et $Y = 0$ sinon. Déterminer la loi et les moments de Y.

5. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit Y une autre variable aléatoire. Pour $n > 0$, la loi de Y sachant que $X = n$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p \in]0, 1[$ fixé. De plus $(Y|X = 0) = 0$.
   a) Quelle est la loi de Y ?
   b) Quelle est la loi de $Z = Y - X$.
   c) Y et Z sont-elles indépendantes ?

6. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs λ, μ et ν. Calculer pour tout $(i, j, k) \in \mathbb{N}^3$

la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j) \cap (Z = k)/(X + Y + Z = i + j + k)).$$

7. Kambei, le ronin, a consenti à recruter six autres samouraï pour défendre un village contre les brigands. chaque nouveau samouraï qu'il rencontre a la probabilité p, $0 < p < 1$, d'accepter de se joindre à lui. On note N le nombre de samouraï qu'il a rencontrés lorsqu'il recrute le dernier.
   a) Établir la loi de N.

   b) Déterminer la série génératrice de N.

8. Amélie est harengère sur les marchés deux fois par semaine qui ont lieu le mardi et le vendredi. Pour chaque jour de marché, la variable aléatoire égale au nombre de clients suit une loi de Poisson : le mardi X de paramètre λ et le vendredi Y de paramètre μ. Soit Z le nombre de clients de la poissonnière dans une semaine. Calculer la série génératrice de Z.

9. Gaston doit partager le produit de sa pêche entre son chat et sa mouette, en parts égales. Le nombre de truites qu'il prend en une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ. Lorsqu'il prend un nombre impair de truites, il en jette une à l'eau[1] pour ne favoriser personne. On note T le nombre de truites ainsi rejetées.
   a) Établir la loi de T et calculer $E(T)$.

   b) Calculer $V(T - \frac{1}{2})$ et en déduire $V(T)$.

10. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$.
   a) Calculer $r_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}$.

[1] M'enfin !

b) On suppose λ non entier. Montrer que p_k est maximal pour une unique valeur k_λ que l'on calculera.

c) Étudier le cas $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

11. Le nombre de clients arrivant dans une boutique suit une loi de Poisson. Le nombre moyen de clients par heure est 2. Il y a saturation s'il y a plus de 4 clients dans la boutique dans une heure. Quelle est la probabilité qu'un client ne soit pas servi ?

12. Une machine fabrique des pièces. Ces pièces sont contrôlées au fur et à mesure. Dès que l'on obtient une pièce défectueuse on arrête la production. N est le nombre de pièces produites. Loi et moments de N ?

13. X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Quand $X = n$, on jette n pièces et Y est le nombre de face tirés. Quelle est la loi, la série génératrice et les moments de Y ?

14. On nomme X_1, respectivement X_2 le nombre de voitures arrivant, respectivement repartant, à un péage. On suppose X_1 et X_2 indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Finalement On note Y le nombre de voitures passant au péage.

    a) Quelle est la loi de Y ?

    b) Quelle est la probabilité que k voitures arrivent quand n passent ?

15. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

    a) i) Montrer que pour tout entier $n > \lambda - 1$, on a :

$$\mathbb{P}(X \geq n) \leq \mathbb{P}(X = n) \times \frac{n+1}{n+1-\lambda}.$$

    ii) En déduire : $\mathbb{P}(X \geq n) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \mathbb{P}(X = n)$.

b) Montrer que $\mathbb{P}(X > n) = o(\mathbb{P}(X = n))$ lorsque n tend vers $+\infty$.

16. Un individu joue avec une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$, de la façon suivante :

    - Il lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On note N la variable aléatoire Égale au nombre de lancers nécessaires.
    - Si n lancers ont été nécessaires pour obtenir pour la première fois pile alors il relance n fois sa pièce. On appelle alors X le nombre de pile obtenu au cours de ces n lancers.

    a) Donner la loi de N.

    b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer la loi conditionnelle à $(N = n)$ de X.

    c) En déduire la loi de X.

    d) On considère B et G deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p')$ et une loi géométrique $\mathcal{G}(p')$.

       i) Déterminer la loi de la variable aléatoire BG.

       ii) Montrer qu'il existe p' (à déterminer) tel que X a la même loi que la variable BG.

       iii) En déduire $\mathbb{E}(X)$.

II Fonctions génératrices

17. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la série génératrice est définie sur $[-1, 1]$ par : $G_X(t) = \dfrac{t^2}{2 - t^2}$. Déterminer les lois de X et de $Y = X/2$.

18. La voie ferrée qui enjambe la rue de Picpus est le domaine des chats. Le nombre X_i de puces sur l'un de ces chats (noté i, $i \in \mathbb{N}^*$) est indépendant du nombre de chats et des puces sur les autres chats. Les variables aléatoires X_i suivent toutes la même loi et sont mutuellement indépendants.
La voie domine une cour close. La première semaine de mai, le nombre N de chats qui tombent dans ce piège d'où ils ne peuvent sortir suit une loi de Poisson de moyenne m. Pour les libérer, une dame patronnesse de Passy se fait conduire en taxi, une tranche de filet de bœuf dans une main (elle ne supporte pas l'odeur du poisson), accompagnée d'un laquais qui porte une cage capitonnée. On note Y le nombre de puces ainsi sauvées d'une mort affreuse (on suppose bien évidemment que cette dame n'a pas de puces).
a) Montrer que la loi de Y es donnée par :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \mathbb{P}(N = n).$$
b) On note G_X et G_Y les séries génératrices des lois de X_i et Y. Montrer que
$$\forall z \in [-1, 1], \quad G_Y(z) = \exp(-m + mG_X(z)).$$

19. Pour noter ses élèves, Frank[2], comme tous les professeurs de maths de Taspégonie, utilise quatre dés pipés identiques ayant leurs faces numérotées de 0 à 5, chaque face ayant une probabilité non nulle de tomber. Il obtient une note X en faisant rouler les quatre dés et en additionnant les numéros X_i obtenus sur chaque dé.
a) Montrer que la série génératrice G_{X_i} de X_i est un polynôme ayant au moins une racine réelle.

[2] Toute ressemblance, bla bla bla...

b) Donner la série génératrice G_X de X.

c) On suppose que Frank utilise des dés tels que le 4 ait une probabilité de $2/5$ de tomber et le 5 de $1/5$ les autre faces étant équiprobables. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

III Approximations

20. Soit X une variable aléatoire ayant des moments de tous ordres. Montrer que pour tout entier n

$$\mathbb{P}(|X| > a) \underset{a \longrightarrow +\infty}{=} o(a^n).$$

21. Soit $\left(X_i\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes. On suppose que pour tout i, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i. On souhaite démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| > \varepsilon\right) = 0$$

a) À quel résultat du cours cela fait il penser ? Peut-on appliquer ce théorème ?

b) Démontrer le résultat demandé.

22. Une suite de variables aléatoires $\left(X_k\right)_{k\geq 1}$ suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour otut $k \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_k = X_k + X_{k+1}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

a) Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$.

b) Soient i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$. Déterminer $\mathbb{E}(Y_iY_j)$. On discutera selon les valeurs de i et j.

c) En déduire $\mathbb{V}(S_n)$.

d) En déduire que si $\varepsilon > 0$ alors $\lim \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$.