Feuille d'exercices numéro 11
Suites et séries de fonctions

I Suites

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur les intervalles donnés des suites de fonctions suivantes (on indiquera des sous intervalles sur lesquels il y a convergence uniforme).

   a) Sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \dfrac{1+x^n}{1+x^{2n}}$.

   b) Sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 0$.

   c) Sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$.

   d) Sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \dfrac{xn}{1+nx}$.

2. Pour tous $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie par $f_n(x) = \dfrac{e^{-n^2(1+x^2)}}{1+x^2}$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $\big(f_n\big)$.

3. Pour tous $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie par $f_n(x) = \exp\big(-\dfrac{1+x^2}{n^2}\big)$.

   a) Étudier la convergence simple de $\big(f_n\big)$.

   b) Soit $a > 0$, montrer qu'il y a convergence uniforme de $\big(f_n\big)$ sur $[-a, a]$.

   c) Étudier la convergence uniforme de $\big(f_n\big)$ sur $\mathbb{R}$.

4. On considère la suite de fonctions $\big(f_n\big)$ définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.
   a) Étudier la convergence simple de cette suite sur $[0,1]$.
   b) Calculer, pour tout n, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer la limite éventuelle de $\big(I_n\big)$; que peut-on en conclure ?
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$g_n(x) = \begin{cases} -(n+1)^3x^2 + (n+1)^2x & \text{si } x \in [0, \dfrac{1}{n+1}], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   a) Donner la représentation graphique de g_n.
   b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t$.
   c) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $\big(g_n\big)$.

II Séries

6. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$.
   a) Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f.
   b) Étudier les variations de f. Déterminer $\displaystyle\lim_{0^+} f$ et $\displaystyle\lim_{+\infty} f$.
7. On considère la série $\sum f_n$ où pour tout entier $n \geq 2$, tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.
   a) Montrez qu'il y a convergence simple sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrez qu'il y a convergence normale sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, mais pas sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrez que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

d) Prouvez que S n'est pas dérivable à droite en 0.

e) Montrez que pour tout entier naturel k, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^k S(x) = 0$. On pourra commencer par encadrer $S(x)$ à l'aide d'une somme géométrique.

8. (Centrale, Mines 2005) Soit $f(x) = \sum\limits_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$

a) Donner le domaine de définition et la monotonie de f. (Variante : montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner son sens de variations)

b) Donner la limite de f en $+\infty$.

c) Donner un équivalent de f en $+\infty$.

d) Donner un équivalent de f en 0.

e) Montrer que f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que :

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

9. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\cos(2nx)}{(2n)!}$. Déterminez $\mathcal{D}_f$, montrez que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$. Calculez $f(x)$.

10. (Navale 2002) Soit (a_n) une suite réelle décroissante et positive. On pose $u_n(x) = a_n x^n (1 - x)$.

a) Étudier la convergence simple de $\sum u_n$ sur $[0, 1]$.

b) Montrez que la convergence normale sur $[0, 1]$ équivaut à la convergence de $\sum a_n/n$.

11. (TPE 2002) soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\right)$.

a) Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ?
b) f est-elle continue sur $\mathcal{D}$?
c) f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$?
d) Donner un équivalent de $f(x)$
   i) quand $x \longrightarrow 0$
   ii) quand $x \longrightarrow +\infty$.

12. (Mines 2003) On pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$.
   a) Pour quelles valeurs de t, l'application f est-elle définie ? On notera E cet ensemble.
   b) f est-elle continue sur E ?
   c) f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$? De classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$?
13. (CCP 2004) Étudier la convergence simple et la convergence normale de la série $\sum u_n$ avec $u_n(x) = e^{-nx}\ln(1+x^n)$. La série est-elle dérivable terme à terme ?
14. (CCP 2004) Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n^4x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
15. (CCP 2005) Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+e^{nx})}{n^3}$.
   a) Donner le domaine $\mathcal{D}$ de définition de f. Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}$.
   b) f est elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$?
16. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$.
   a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
   b) Donner un équivalent simple de $f'(x)$, puis de $f(x)$, au voisinage de 0^+.

17. Soit $g \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{C})$ telle que $g(0) = 0$.
    a) Montrer qu'on définit une fonction h continue sur $[0,1]$, en posant $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right)$. *Indication : on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis pour g entre 0 et un réel $a \in [0,1]$.*
    b) Trouver toutes les fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, continues en 0 et telle que :

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right).$$

18. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$. On utilisera la formule $e^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$.

19. Soient $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$, $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
    a) Déterminer les domaines de définition de Γ et ζ.
    b) Montrer que :

$$\forall x > 1, \quad \Gamma(x)\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, \mathrm{d}x.$$