Feuille d'exercices numéro 11
Indications et corrigés partiels

I Suites

1. a) CS vers g définie par $g(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$, $g(x) = 0$ si $x > 1$. PB en 1 : limite discontinue... CU sur $[0, a]$ et $[b, +\infty[$ avec $0 < a < 1 < b$.

   b) CS vers 0. CU sur $[a, +\infty[$

   c) CS vers 0. CU sur $[0, a]$.

   d) CS vers g telle que $g(0) = 0$ et $g(x) = 1$ si $x > 1$. CU sur $[a, +\infty[$
2. CS et CU vers 0 sur $\mathbb{R}$.
3. a) CS vers 1.

   b) $\left\| f_n - 1 \right\|_{\infty,[-a,a]} = 1 - \exp\left(-\dfrac{1+a^2}{n^2}\right)$...

   c) $\left\| f_n - 1 \right\|_{\infty,\mathbb{R}} = 1$...
4. a) CS vers 0.

   b) $I_n = \dfrac{1}{2n}\ln\left(1 + 2^n\right) \longrightarrow \dfrac{1}{2}\ln(2)$. Il n'y a pas CU sur $[0, 1]$ sinon $I_n \longrightarrow 0$.
5. a) $g_n(x) = (n+1)^3 \cdot x \cdot \left(\dfrac{1}{n+1} - x\right)$ donc arc de parabole simple sur $[0, \dfrac{1}{n+1}]$...

   b) $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}$.

   c) CS vers 0. Il ne peut y avoir CU sur $[0, 1]$ sinon I_n tendrait vers 0...

II Séries

6. a) On remarque tout de suite que f est impaire : on peut se limiter à $\mathbb{R}_+$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. La série converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ d'où continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ puis par parité sur $\mathbb{R}^*$.

   b) f est somme de fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut aussi appliquer le théorème de dérivation sur tout segment.
   En 0^+ : f étant décroissante, elle a une limite éventuellement infinie. Si cette limite est finie et vaut L, on a, pour tout n et tout $x > 0$: $L \geq f(x) \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n(x)$. Or la somme finie tend vers $+\infty$ en 0^+. On ne peut donc avoir L finie.
   En $+\infty$: CN sur $[1, +\infty[$ puis double limite. Ou alors : on a $\mathrm{sh}(u) \geq \dfrac{e^u}{2}$, donc, si $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \dfrac{e^{-x}}{2(1-e^{-x})}$.

7. a) Séparer les cas $x = 0$ et $x > 0$.

   b) Étudier la fonction f_n et voir que $\|f_n\|_{\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{n \ln n}$ et que si $a > 0$ et n assez grand $\|f_n\|_{[a,+\infty[} = f_n(a)$.

   c) On utilise la version sur tout segment.

   d) Observer $\dfrac{S(x) - S(0)}{x - 0}$ et voir que cette fonction est décroissante et ne peut avoir de limite finie en 0 (même idée qu'au 6.b)...

   e) Observer $\displaystyle\sum_{n \geq 1} x^k f_n(x)$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$...

8. a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$. Sans dériver : f est décroissante car somme de fcts décroissantes.

b) La série converge normalement sur $[1, +\infty[$. On en déduit $\lim_{+\infty} f = 0$.

c) Montrer que $e^x f(x) \longrightarrow 1$...

d) Ici on va comparer à une intégrale. On commence par encadrer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ à l'aide de f, pour en déduire un encadrement de f...

e) On utilise le théorème d'intégration des séries de fonctions intégrables. Attention : l'intervalle d'intégration n'est pas un segment.

9. On remarque que $\cos(2nx) = \Re e(e^{2inx})$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. On montre entre autres que $f^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)^p \cos(2nx + p\pi/2)}{(2n)!}$. On peut tuer l'exercice en calculant $f(x)$ dès le début :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \Re e\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{2inx}}{(2n)!}\right) \\
&= \Re e\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{ix})^{2n}}{(2n)!}\right) \\
&= \Re e\left(\frac{1}{2}\exp(e^{ix}) + \frac{1}{2}\exp(-e^{ix})\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{\cos(x)}\cos(\sin(x)) + \frac{1}{2}e^{-\cos(x)}\cos(\sin(x))
\end{aligned}$$

10. a) Séparer les cas $x \in [0, 1[$ (majorer par une série géométrique) de $x = 1$ (série nulle).

b) $\|x^n(1-x)\|_{[0,1]} \sim \dfrac{1}{ne}$.

11. a) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et f est paire : on se restreint à $\mathbb{R}_+$.

b) Pour $u \geq 0$, on majore $\ln(1 + u) \leq u$ et on a convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

c) On utilise le théorème ad-hoc (toujours sur $\mathbb{R}_+$).

d)i) $f'(0) = 0$ donc un DL_1 ne suffit pas. Plusieurs méthodes alors. Soit on explore si f est deux fois dérivable en 0 puis on fait un DL_2, soit on montre que pour $0 \leq x < 1$, $u - u^2/2 \leq \ln(1+u) \leq u$...

ii) On encadre l'intégrale $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln\left(1 + \frac{x^2}{t^2}\right) \mathrm{d}t$.

12. a) $\mathrm{E} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$.

b) Convergence normale sur E...

c) On travaille sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$: f y est $\mathcal{C}^\infty$.

13. Convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ et normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

14. On remarque d'abord que f est paire. On a $0 \leq u_n(x) \leq 1/n^2$: convergence normale sur $\mathbb{R}$. Pour la dérivée, on se place sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

15. a) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Il faut séparer les cas $x \leq 0$ et $x > 0$ et trouver un équivalent de $u_n(x)$ dans les deux cas. On se place ensuite sur tout segment de $\mathbb{R}$.

b) On a $0 \leq u_n'(x) \leq 1/n^2$...

16. a) On remarque tout de suite que f impaire : on se place sur $\mathbb{R}_+$. Sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leq u_n(x) \leq \dfrac{\pi}{2n^2}$.

On a $u_n'(x) = \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$. Pour la dérivée on se place sur un segment de $\mathbb{R}_+^*$.

b) Pour $x > 0$, on encadre $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t(1+t^2x^2)} \mathrm{d}t$ pour déduire un encadrement de $f'(x)$ et ainsi trouver un encadrement de f et conclure...

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t(1+t^2x^2)}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$, donc pour tout $n \geq 1$:

$$u_n'(t) \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t(1+t^2x^2)}\,\mathrm{d}t \geq u_{n+1}'(x)$$

et donc :

$$f'(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2x^2)} \geq f'(x) - u_1'(x) = f'(x) - \frac{1}{1+x^2}$$

Comme :

$$\frac{1}{t(1+t^2x^2)} = \frac{1}{t} - \frac{tx^2}{1+t^2x^2}$$

On déduit :

$$-\ln(x) + \ln(\sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{1+x^2} \geq f'(x) \geq -\ln(x) + \ln(\sqrt{1+x^2})$$

On voit que $f'(x) + \ln(x)$ est bornée au voisinage de 0 et donc on en déduit l'équivalent de f' en 0. Pour celui de f en 0, on voit que $\displaystyle\int_0^1 (f'(t) + \ln(t))\,\mathrm{d}t$ converge et on observe...

17. a) On utilise l'inégalité des accroissements finis pour g entre 0 et x quand $x \in [0,1]$ pour montrer la convergence normale sur $[0,1]$. En fait h est Lipschitzienne...

    b) On somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g(x/2^k)$ de deux façons différentes et on observe...

18. On est amené à calculer l'intégrale de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \ln^n(x)}{n!}\,\mathrm{d}t$. Attention il y a un problème potentiel en 0.

19. a) Cours $= \mathcal{D}_\Gamma = \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{D}_\zeta =]1, +\infty[$.

b) On observe que si $t > 0$,

$$\frac{1}{e^t - 1} = e^{-t} \cdot \frac{1}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$$

Ensuite on fera le changement de variables $u = (n+1)t$...