Feuille d'exercices numéro 5 Suites dans un espace vectoriel normé

1. Soit E $= \mathbb{R}[X]$. On définit sur E les applications suivantes : si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|,$$
$$N_2(P) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2},$$
$$N_\infty(P) = \max\{|a_k| \mid k \in [\![0, n]\!]\}$$

Attention : l'entier n dépend de P.

a) Montrez que ces trois applications sont des normes sur E.

b) Montrez que pour tout polynôme P :

$$N_\infty(P) \leq N_2(P) \leq N_1(P).$$

c) En considérant la suite (P_n) définie par $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} X^k$, montrez qu'il n'existe pas de constante $\alpha > 0$ telle que pour tout polynôme P :

$$\alpha N_1(P) \leq N_\infty(P) \leq N_2(P) \leq N_1(P)$$

2. Sur $\mathbb{R}[X]$ muni des normes 1 et ∞ définies à la question 1., étudiez la suite (P_n) définie par $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{n+k}$ (i.e ; indiquez si elle converge ou diverge, pour chacune des deux normes).
3. Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|_{\mathrm{E}})$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Pour deux parties non vides A et B de E, on définit $d(A,B) = \inf\{\|a-b\|_{\mathrm{E}} \mid (a,b) \in A \times B\}$ la distance de A à B et $\delta(A) = \sup\left\{\|a-a'\|_{\mathrm{E}} \mid (a,a') \in A^2\right\}$ le diamètre de A.
   a) Montrez que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + d(A,B) + \delta(B)$.
   b) Montrez : $d(x,A) = d(\{x\},A) = 0 \iff x$ est adhérent à A.
   c) On suppose A compact et B fermé. Montrez que $d(A,B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$.
4. (CCP 2003) Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on définit

$$\|M\| = n \max\{|m_{ij}| \mid 1 \leq i,j \leq n\}.$$

   a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que $\|M \cdot N\| \leq \|M\|\|N\|$.
   c) On admet le résultat suivant : $\sum A_k$ converge si et seulement si $\sum \|A_k\|$ converge. Montrer que la série de terme général $M^k/k!$ converge.
   d) Montrer que la suite (A_k) converge vers A si et sulement si la suite (PA_kP^{-1}) converge vers PAP^{-1}.
5. (CCP 2005) Soient Φ, N et S les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\Phi(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(k)\right|,$$
$$N(P) = \sup\{|P(x)| \mid x \in [0,1]\},$$
$$S(P) = |P(0)| + N(P').$$

a) Montrer que Φ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que Φ et N ne sont pas équivalentes, c'est àcdire qu'il n'existe pas de constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$ telles que $\alpha\Phi \leq N \leq \beta\Phi$.

c) Montrer que S est une norme.

d) Montrer qu'il existe $A_n \in \mathbb{R}$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $N(P) \leq A_n S(P)$.

6. (St-Cyr 2005) On considère la matrice $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $h_{ij} = \dfrac{1}{|i-j|+1}$ À l'aide de Maple[1], montrer que l'application : $X \longmapsto N(X) = \sqrt{{}^tXHX}$ est une norme sur $\mathbb{R}^3$.
7. (CCP 2001) Pour réviser... Calculer la limite en 0 de

$$\frac{1}{x^4}\left(\frac{\arcsin(\arcsin(x))}{x} - \frac{x}{\sin(\sin(x))}\right)$$

1. Ça c'était à l'époque, maintenant, on essaye de le faire avec Python