Feuille d'exercices numéro 8
Séries entières

I Rayons de convergence

1. Calculer le rayon de convergence des séries suivantes

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n} x^n$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{\sqrt{n+1}} x^n$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) x^n$.

   d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln n}$.

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \arctan n}{n^n} x^n$.

   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (1+\frac{1}{n})^n x^{2n}$.

   g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin(\frac{1}{n}) - \tan(\frac{1}{n})) x^n$.

   h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!}{n!} z^n$.

2. On note a_n le nombre de chiffres de l'entier n.

a) Supposons que l'on connaisse $N = a_n$ $(N \geq 2)$, donner un encadrement de n en fonction de N. Indication : si $N = 2$, alors, $10 \leq n \leq 99$.

b) En déduire un encadrement pour a_n en fonction de n.

c) en déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

d) en déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, où b_n est la somme des chiffres de n.

e) en déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, où c_n est le produit des chiffres de n.

3. Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

a) Montrer que la série $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

b) Expliciter f, R et g lorsque $a_n = \dfrac{1}{n+1}$.

4. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Soit α un réel. On note ρ le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^\alpha z^n$.

a) On suppose que $\alpha \geq 0$. Montrer que $\rho = R^\alpha$.

b) On suppose que $\alpha < 0$. Montrer que $\rho \leq R^\alpha$. Donner un exemple où l'on a égalité, puis un autre exemple où cette inégalité est stricte.

5. Soit (a_n) un suite de complexes non nuls tels que $\left|\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right|$ (resp. $\left|\dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}\right|$) admet une limite l_1 (resp. l_2). Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.
   a) Etudier la convergence de cette suite.
   b) Donner le rayon de convergence R de la série entière
   $$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

7. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Comparez les rayons de convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 x^n$.

8. Rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ avec
   a) $a_n = \dfrac{\ln(n)\sqrt{n}}{n^2+1}$.
   b) $b_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

9. (CCP 2003) Soit la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan(n^a) x^n$.
   a) Donner son rayon de convergence (on discutera selon la valeur de a).
   b) Étudier le domaine réel de convergence de la série numérique.

10. (CCP 2003) Déterminer le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ avec $\displaystyle a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

11. (Centrale 2004) Nature de la série de terme général

$$u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right).$$

Pour quelles valeurs du réel x, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n x^n$ converge-t-elle ?

12. (CCP 2005) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\displaystyle a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = 0$.

b) Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge et calculer sa somme.

c) Trouver le rayon de convergence de la série de terme général $a_n z^n$ $(z \in \mathbb{C})$.

13. (CCP 2003) soit (a_n) une suite telle que a_{n+1}/a_n admette une limite finie en $+\infty$. Montrer que les rayons de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^n$ sont les mêmes, puis que l'application $\displaystyle x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable.

14. (CCP 2004) Rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{n^n} x^n$.

II Calcul de sommes

15. On pose $a_0 = a_1 = 1$ et pour $n > 0$,

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}/(n+1).$$

a) Montrez que pour tout $n > 0$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

b) En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.

c) Calculez sa somme.

16. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de période 4.

a) Donner un exemple de suite de période 4.

b) Pour tout x réel, on note $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Exprimer $S_{4p-1}(x)$ en fonction de $S_3(x)$ et de x.

c) Pour quelles valeurs de x, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ a-t-elle un limite ?

d) On note $S(x)$ cette limite, exprimer $S(x)$ en fonction de x et de a_0, a_1, a_2 et a_3.

17. Soient $\alpha \neq \beta$ deux réels. Rayon de convergence et somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$, où a_0 est donné, $a_n = \alpha a_{n-1}$ si n est pair, et $a_n = \beta a_{n-1}$ si n est impair.

18. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières :

a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (an^2 + bn + c)x^n$.

b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$.

c) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1+n+n^2}{2^n} x^n$.

d) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)!} x^n$.

e) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(\frac{2\pi n}{3}) \frac{x^n}{n}$.

f) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3n+1}$.

g) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

h) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.

i) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$.

j) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+2+\cdots+n}$.

k) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{n}$.

l) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(2n)!}$.

19. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^3+1}{n!}$.

20. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos n$.

21. Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^3}$. Montrer que

$$S(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{t} \ln\left(\frac{x}{t}\right) \, \mathrm{d}t.$$

22. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n.$$

Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

23. Même question avec (u_n) définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

24. (TPE 2005) Rayon de convergence et somme de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}.$$

Indication : considérer $x \cdot f(x^2)$.

25. (CCP 2001) Rayon de convergence et valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$.

26. (Mines 2004) Soit $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$. Donner le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et la somme de la série.

27. (CCP 2004) citer tous les développements en série entière des fonctions usuelles. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$.

28. (CCP 2003) Donner le rayon de convergence de la série $\sum n^2 x^n$ et déterminer sa somme lorsqu'elle existe (indication : $n^2 = n(n-1) + n$).

29. (CCP 2004) Montrer que $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

III Développements en série entière

30. Calculer, en précisant le rayon de convergence, un développement en série entière des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$.

b) $x \longmapsto (\dfrac{1+x}{1-x})^2$.

c) $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{e^x}$.

d) $x \longmapsto \arccos \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$.

e) $x \longmapsto \arctan(\dfrac{1-x^2}{1+x^2})$.

f) $x \longmapsto \dfrac{1-abx^2}{1-(a+b)x+abx^2}$.

g) $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x)(1-x^2)(1-x^4)}$.

h) $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^n}$, n étant un entier ≥ 1 fixé.

i) $x \longmapsto \dfrac{x^3}{(x-1)^2(x+1)}$.

j) $x \longmapsto \dfrac{1-x\cos\theta}{x^2-2\cos(\theta)x+1}$, $\theta \in \mathbb{R}$ donné.

k) $x \longmapsto \dfrac{1-x^2}{x^2-2x\cos\theta+1}$.

l) $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

m) $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$.

n) $x \longmapsto e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

o) $x \longmapsto \arctan(1+x)$.

31. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.
   a) Quel est son rayon de convergence ?
   b) Montrez que f satisfait à l'équation différentielle
   $$(1-x^2)y' - xy = 1.$$
   c) En déduire une expression de f.
32. (TPE 2001) Développer en série entière au voisinage de 0 $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
33. (CCP 2001, Mines 2005) Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{x^n}{n!}$. Donner le rayon de convergence de S et un équivalent de S en $+\infty$. Indication : donner la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} - \dfrac{e^n}{\sqrt{n}}$.
34. (TPE 2001, 2002) Effectuer le développement en série entière de $F(x) = \arctan\left(\dfrac{2-3x}{1+6x}\right)$.
35. (Centrale 2001) Foit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   a) Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer F'.
   b) Calculer $G(x) = F(1/x)$ en fonction de $F(x)$.
   c) On pose $f(x) = F(x)/x$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est développable en série entière sur $[-1,1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   d) Calculer $f(1)$ à 10^{-3} près.
36. (Centrale 2001) Montrer que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière au voisinage de 0.

37. (CCP 2001) Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $y = f(x) = e^{x^2/2} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$. En déduire son développement en série entière.
38. (CCP 2002) soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t + x \cdot \sin(t)}$.
    a) Montrer que f est bien définie pour tout $x \in]-1,1[$.
    b) Montrer que f peut s'écrire sous forme de série entière sur $]-1,1[$.
39. (CCP 2004) Soit $\sum a_n x^n$ la série entière de coefficients $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ $(n \in \mathbb{N})$
    a) Donner l'intervalle I de convergence de cette série entière.
    b) Calculer la somme de cette série entière.
    c) Trouver les coefficients du développement en série entière de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{(1-x)^2}$.
40. Former le développement en série entière au voisinage de 0 de f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
41. (CCP 2004) Montrer que $f(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(2x) - 1}{2x}$ est prolongeable par continuité en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.