Feuille d'exercices numéro 8
Séries entières
Indications et corrigé partiel

I Rayons de convergence

1. On trouve :
   a) $R_a = 0$.
   b) $R_b = 1/e$.
   c) $R_c = 1$. Voir un produit de Cauchy, ou encadrer la somme finie.
   d) $R_d = 1$.
   e) $R_e = e$. Stirling !
   f) $R_f = 1$.
   g) $R_g = 1$.
   h) $R_h = 1$. On voit $k \cdot k! = (k+1)! - k!$.
2. a) On a clairement $10^{N-1} \leq n < 10^N$. C'est à dire $10^{a_n - 1} \leq n < 10^{a_n}$.
   b) Donc en passant au logarithme, $\dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} < a_n \leq 1 + \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)}$.
   c) $R_a = 1$.
   d) On a, pour $n \geq 1$, l'encadrement $1 \leq b_n \leq 9a_n$ et donc $R_b = 1$.
   e) On a la majoration $c_n \leq 9^{a_n} \leq n$ et donc $R_c \geq 1$. Mais (c_n) ne tend pas vers 0 et donc $R_c \leq 1$.
3. a) Soit r tel que $0 < r < R$. Pour z quelconque :

$$0 \leq \left| \frac{a_n}{n!} z^n \right| = |a_n r^n| \cdot \frac{(|z|/r)^n}{n!}$$

Comme $0 < r < R$, $a_n r^n \longrightarrow 0$. Donc, en posant $q = |z|/r$:

$$0 \leq \left|\frac{a_n}{n!} z^n\right| = o\big(\frac{q^n}{n!}\big)$$

Comme la série exponentielle $\sum q^n/n!$ converge pour tout $u \geq$, par comparaison par $\leq$ de séries à termes positifs, $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ converge absolument pour tout z et donc $R = +\infty$.

b) On a, pour z réel :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n+1} = -\frac{\ln(1+z)}{z} \quad (R = 1)$$

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{x}(e^z - 1) \end{aligned}$$

4. a) Le cas $\alpha = 0$ est simple, on obtient $\rho = 1 = R^0$.
Supposons maintenant $\alpha > 0$ et $r > 0$. Le signe de α permet de dire $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si $(a_n^\alpha (r^n)^\alpha)$ bornée, si et seulement si $(a_n^\alpha (r^\alpha)^n)$ est bornée. En prenant successivement $x = r$ pour $0 < r < R$ et $r > R$, on obtient bien $\rho \geq R^\alpha$ puis $\rho \leq R^\alpha$.

b) Soit $r < R$. Comme $\alpha < 0$, on a $a_n r^n \longrightarrow 0$ bornée induit $(a_n^\alpha (r^\alpha)^n)$ pas bornée, induit $r^\alpha \geq \rho$. On a donc l'implication : pour tout r, $r < R \Rightarrow r^\alpha \geq \rho$. Donc $R^\alpha \geq \rho$.
Deux exemples correspondant à la question pour $\alpha = -1$ sont : $\sum 2^n x^n$ et $\sum a_n x^n$ où $a_n = 1$ pour n pair et $a_n = n!$ pour n impair.

5. On examine les séries $\sum a_{2n}x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}$. Elles ont même rayon de convergence $R' = \sqrt{l_1 l_2}$, donc $R \geq R'$. Mais si $|x| > R'$, $(a_{2n}x^{2n})$ n'est pas bornée (déf de R') et donc $(a_n x^n)$ n'est pas non plus bornée. Comme la propriété précédente est vraie pour tout x tel que $|x| > R'$, on a $R \leq R'$.
6. On voit que la suite (a_n) est décroissante positive (inégalités classiques de ln) et que la seule limite possible est 0 (on résout $x = \ln(1+x)$ via une étude de fonctions).
   a) Comme $a_n \longrightarrow 0$, on a $a_{n+1} \sim a_n$. De ce fait $R = 1$.
7. Cf question **??** : on a $R_b = R_a^2$.
8. a) $R_a = 1$
   b) $R_b = 1$. Faire un développement limité de b_n.
9. a) Quoi qu'il arrive $R = 1$. Il est judicieux de séparer trois cas $a = 0$, $a > 0$ et $a < 0$.
   b) En notant $\mathcal{D}$ ce domaine, on a :

$$\mathcal{D} = \begin{cases}]-1, 1[& \text{si } a \geq 0, \\ [-1, 1[& \text{si } -1 \leq a < 0, \\ [-1, 1] & \text{si } a < -1. \end{cases}$$

10. On encadre brutalement $\dfrac{n}{\sqrt{2n}} \leq a_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$ et on obtient $R = 1$.
11. D'abord :

$$\begin{aligned} n^2\pi \ln\big(1 - \frac{1}{n}\big) &= n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + \frac{\pi}{4n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \\ \cos\left(n^2\pi \ln\big(1 - \frac{1}{n}\big)\right) &= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{3n} + \frac{\pi}{4n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) \\ &= (-1)^n \frac{\pi}{3n} + O(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

Donc u_n est la somme du terme général d'une série qui converge (on a utilisé le théorème spécial des séries alternées) et de celui d'une série absolument convergente. La série $\sum u_n$ converge donc.

Ensuite, on voit que $u_n \sim (-1)^n \dfrac{\pi}{3n}$, donc le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$ est $R = 1$. De plus $\sum u_n$ converge et $u_n \cdot (-1)^n \dfrac{\pi}{3n}$ donc $\sum u_n(-1)^n$ diverge. Conclusion : $\sum u_n x^n$ converge ssi $u_n \in]-1, 1]$.

12. a) On utilise le théorème de de la convergence dominée.

    b) On a clairement (a_n) décroissante et on a vu $a_n \longrightarrow 0$. Le théorème spécial des séries alternées permet alors de conclure pour la convergence. Pour la somme on écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k &= \int_0^1 \frac{1 + (-1)^{n+1} \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1+t^2}{2}} \, \mathrm{d}t \\
&= 2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} + (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot \int_0^1 \frac{\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{3+t^2} \, \mathrm{d}t \\
&= 2 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} + (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot R_n
\end{aligned}$$

    Une majoration montre que $0 \leq R_n \leq \dfrac{1}{3} a_{n+1} \ldots$

    c) On encadre $\dfrac{1}{2^n} \leq a_n \leq 1$ et on déduit que $R = 1$.

13. C'est du cours !

14. $R = e$. Stirling !

II Calcul de sommes

15. a) Récurrence. Attention il faut faire une hypothèse sur a_n et a_{n-1}...

    b) Par comparaison $R = 1$.

    c) Observons les différents éléments :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} x^n &= \sum_{m=2}^{+\infty} a_m x^{m-1} \quad (m = n+1) \\
&= \frac{1}{x}(f(x) - a_0 - a_1 x) \\
&= \frac{1}{x}(f(x) - 1 - x) \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n+1} x^n &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n+1} x^{n+1} \\
&= \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^n \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{m=0}^{+\infty} a_m t^{m+1} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a donc l'équation :

$$\frac{1}{x}(f(x) - 1 - x) = f(x) + \frac{2}{x} \int_0^x t f(t) \,\mathrm{d}t$$

En multipliant par x puis en dérivant, on obtient :

$$f'(x) - 1 = f(x) + x f'(x) + f(x) + 2x f(x)$$

16. a) Par exemple (i^n).

    b) On a, en faisant des paquets de 4 termes :

$$\begin{aligned} S_{4p-1}(x) &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{\ell=4k}^{4k+3} a_\ell x^\ell \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{3} a_m x^{4k+m} \\ &= S_3(x) \sum_{k=0}^{p-1} x^{4k} \\ &= S_3(x) \frac{1-x^{4p}}{1-x^4} \end{aligned}$$

    c) La limite existe si et seulement si $|x| < 1$.

    d) On a donc $S(x) = \dfrac{S_3(x)}{1-x^4}$.

17. On a, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (\alpha\beta)^n a_0, \\ a_{2n+1} &= \beta \cdot (\alpha\beta)^n a_0 \end{aligned}$$

Un calcul similaire à la question **??** donne $R = \sqrt{\alpha\beta}$, puis, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} &= \frac{a_0}{1-\alpha\beta x^2}, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} &= \frac{a_0 \beta x}{1-\alpha\beta x^2} \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1+\beta x}{1-\alpha\beta x^2} a_0.$$

18. a) $R = 1$. Pour la somme, écrire $an^2+bn+c = a(n+1)(n+2)+d(n+1)+e$ et utiliser les dérivées de la série géométrique.

    b) $R = 1$. Observer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 f(x)) = -x\ln(1-x)$.

    c) $R = 2$. Remarquer que $n^2+n+1 = (n+1)(n+2) - 2(n+1)+1$ et utiliser les dérivées de la série géométrique. $f(x) = 2\dfrac{x^2+4}{(2+x)^3}$.

    d) $R = +\infty$. Voir que $f(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$.

    e) $R = 1$: $R \geq 1$ en majorant les coefficients par 1, puis $R \leq 1$ parce que les coefficients ne tendent pas vers 0. Pour la somme dériver et utiliser $\cos(x) = \Re e(...)$

    f) $R = 1$. Observer $g'(y)$ où $g(y) = yf(y^3)$.

    g) $R = +\infty$.

    h) $R = 1$. Calculer f', f'' et voir...

    i) Séparer les termes d'ordre pair et ceux d'ordre impair. $R = 1$.

    j) $R = 1$. Calculer explicitement $1+2+\cdots+n$, puis calculer g'' ou $g(x) = xf(x)$.

    k) $R = 1$. Poser $y = x^4$.

    l) $R = +\infty$. Pour $x > 0$ poser $y = \sqrt{x^3}$. Utiliser la parité de f.

19. Voir que $2n^3+1 = 2n(n-1)(n-2) + an(n-1) + bn + 1$ avec a et b à déterminer.

20. Voir que $\cos(n) = \Re e(...)$ et sommer une série géométrique.

21. À revoir...

22. D'abord, on voit que $u_n = a(-1)^n + b(3)^n$. On a donc $R =$

1/3. Pour tout x tel que $|x| < 1/3$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^n &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{+}3\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \frac{2}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \\ &= \frac{2}{x}(f(x) - u_0) + 3f(x)\end{aligned}$$

Mais :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^n = \frac{1}{x^2}(f(x) - u_0 - u_1 x)$$

23. Ici $u_n = a + b \cdot 2^n$, donc $R = 1/2$...
24. $R = 1$. Pour $x > 0$, on pose $y = \sqrt{x}$ et on observe $yf(y^2)$. Pour $x < 0$, on pose $y = \sqrt{-x} = \sqrt{|x|}$. On a alors $x = -y^2$ et o regarde don $yf(-y^2)$...
25. Déjà dans la liste...
26. En majorant a_n, on a facilement $R \geq 1$.
27. Voir le suivant
28. L'indication dit tout...
29. Utiliser $\ln(2) = \displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ et utiliser la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-t)^k$ quand $t \in [0,1]$...

III Développements en série entière

30. a) On utilise celui de $\sqrt{1-u}$. $R = 1$.

    b) On a en fait $(1 - 2x + x^2) \cdot \dfrac{1}{(1-x)^2}$. $R = 1$.

c) On veut $\Re e(\exp(-ix - x))$. $R = +\infty$.

d) Peu commode... $f'(x) = ?$ $R = 1$.

e) $f'(x) = ?$ $R = 1$.

f) $1 - (a+b)x + abx^2 = (1-ax)(1-bx)$.

g) Produit de Cauchy... $R = 1$.

h) Factoriser le dénominateur. $R = 1$.

i) Même idée que les précédents. $R = 1$.

j) $x^2 - 2cos(\theta)x + 1 = (e^{i\theta} - x)(e^{-i\theta} - x)$. $R = 1$.

k) Idem précédent.

l) Idem h.

m) $f' = ?$ idem précédent...

n) Produit deCauchy. $R = +\infty$.

o) $f' = ?$ $1 + (x+1)^2 = (-1+i-x)(-1-i-x)$. $R = |1 \pm i| = \sqrt{2}$.

31. a) $R = 1$.

    b) On dérive et on réindice !

    c) On résout l'équation en se souvenant que $f(0) = 0$.

32. $f'(x) = ?$ $R = +\infty$.

33. $R = +\infty$.

34. $f'(x) = ?$ $R = 1/3$. En fait, on voit que $f(x) = f(0) - \arctan(3x)$...

35. a) Primitive !

    b) $G'(x) = ?$

    c) Primitive de DSE etc. $R = 1$.

    d) On a une série alternée.

36. Interversion série-intégrale. On utilise le DSE de cos.

37. $y' - xy = 1$. On cherche la solution DSE tq $y(0) = 0$.

38. a) $e^t + x\sin(t) \geq e^t - x > 0$...

b) On fait un DSE de $\dfrac{1}{1 + xe^{-t}\sin(t)}$ au voisinage de 0 pour x. Puis interversion série intégrale.

39. $a_n \longrightarrow e$ donc (a_n) est bornée d'où $R \geq 1$ et $\sum a_n$ diverge et donc $R \leq 1$.
    a) Reconnaître un produit de Cauchy.
    b) Dériver ou multiplier par...
40. vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. Ensuite $f' = ?$ Voir que f' est DSE puis conclure. On ne connaît pas $f(0)$.
41. DSE de ch...