Feuille d'exercices numéro 7
Séries

1. Déterminez la nature des séries qui suivent. Si la série converge déterminez n à partir duquel on est sûr que $|S - S_n| \leq 10^{-2}$, puis donnez un encadrement de S à 10^{-2} près.
   a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.
   b) $v_n = \dfrac{(-1)^n}{2n^3+3}$.
   c) $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.
   d) $t_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
2. Sachant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$, calculez $\displaystyle\sum_{k=1} \frac{1}{k(2k-1)}$.
   Indication : on pourra décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{x(2x-1)}$.
3. Nature et somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ $(n \geq 0)$. Indication : pour le calcul de la somme utilisez, par exemple : $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x$.
4. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$ converge de somme $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
5. Nature de la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \cdot [(1+1/n)^{-n} - 1/e].$$

6. (CCP 2005) Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^n}{n!b^n}$.
7. (CCP 2002 ; séries télescopiques) Montrer que les séries suivantes sont convergente et calculer leur somme.
   a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ $(n \geq 2)$.
   b) $b_n = \ln(1 - 1/n^2)$ $(n \geq 2)$.
8. (CCP 2002) nature des séries de termes généraux
$$u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \text{ et } v_n = \sqrt{n^2+an} - \sqrt{n^2+1}.$$
9. (CCP 2002) Soit $\dfrac{u_n = \cos(nx)}{2^n}$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n et donner éventuellement sa somme.
10. (CCP 2003) Nature de $\sum \sin(\pi\sqrt{a^2+n^2})$.
11. (CCP 2003) Nature des séries de terme généraux
$$u_n = e^{\frac{1}{2n}} - e^{\frac{1}{2n+1}} \text{ et } v_n = e^{\frac{1}{2n}} + e^{\frac{1}{2n+1}}.$$
12. (CCP 2003) Nature et somme éventuelle de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(4n^2-1)}$ $(n \geq 1)$.
13. (CCP 2004) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2 + 2n\cos(\theta) - \sin^2(\theta)}$ converge et calculer sa somme.
14. (École de l'Air 2004) Montrer que la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ $(n \geq 2)$ est alternée, qu'elle converge et calculer sa somme.
15. (Centrale 2003, CCP 2005) Soit $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.
   a) Donner la nature de $\sum u_n$.

b) Lorsque $\sum u_n$ converge calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

16. Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$. On définit la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$.
    a) Exprimer simplement $\sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de $u_0, u_1, \ldots, u_n$.
    b) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Déterminer la nature de $\sum v_n$.
    c) On suppose que $\sum |u_n|$ converge. Quelle est la nature de $\sum v_n$?
    d) On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum v_n$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge.
17. Nature des séries
    a) $\sum \dfrac{e^{-2n}}{1+n}$
    b) $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$
    c) $\sum a^{\sqrt{n}}$.
18. Soit (u_n) une suite positive.
    a) Montrer que $\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$ sont de même nature.
    b) Ce résultat est-il encore valable avec une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque ?
19. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^4}$ tend vers 0 et en donner un équivalent.
20. Montrer la convergence et donner la somme de la série de terme général $w_n = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p^2(n-p)!}$.

21. Soit $x_{n+1} = \dfrac{e^{-x_n}}{n+1}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé.
    a) Nature de la suite (x_n).
    b) Déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.
    c) Nature de la série $\sum x_n$.
22. (Centrale 2001) Étudier la série de terme général
$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^\alpha}.$$
23. (CCP 2002) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1)(2n+3)}$. On pourra décomposer $\dfrac{1}{(2x+1)(2x+3)}$ en éléments simples.
24. (Centrale 2002) Nature de la série de terme général
$$u_n = \int_{2n}^{3n} \frac{\mathrm{d}t}{2 + \cos(3t) + 4t^{2/3}}.$$
25. (CCP 2003)
    a) Soit $x \in [0, 1]$. Trouver une relation entre $\arccos(\sqrt{1-x^2})$ et $\arcsin(x)$.
    b) Quelle est la nature de la série de terme général
$$u_n = \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$
26. Nature de $\displaystyle\sum \int_{1/\sqrt{n}}^{1} e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$.
27. Nature de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.