Feuille d'exercices numéro 7
Séries
Corrigé/indications

1. Ici on veut que $|R_n| \leq 10^{-2}$ et pour cela, comme toutes les séries satisfont aux hypothèses du théorème spécial des séries alternées, on veut $|u_{n+1}| \leq 10^{-2}$. On a donc :

   a) $n = 49$, $S_n = 0{,}78$.

   b) $n = 3$, $S_n = 0{,}17$.

   c) $n = 7$, $S_n = -0{,}83$.

   d) $n = 2499$, $S_n = -0{,}61$.

2. On a : $\dfrac{1}{x(2x-1)} = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{1}{x}$. Observons alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k-1)}
\end{aligned}$$

3. Série alternée satisfaisant au théorème ad-hoc. Ensuite :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^{2k}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4} + R_n\end{aligned}$$

   Il ne reste plus qu'à majorer $|R_n|$ et conclure...

4. Même principe qu'au 3. Se servir du fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée...

5. Faire un développement limité à l'ordre 2 en $1/n$. Penser à exp(ln(...)). Attention : le logarithme doit être développé à l'ordre 3...

6. Utiliser la règle de d'Alembert ou la formule de Stirling pour conclure dans les cas $|b| < e$ et $|b| > e$. Le cas $b = e$ se traite à l'aide de la formule de Stirling. les autres cas sont indéterminés.

7. a) $a_n = u_{n+1} - u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$.

   b) $b_n = u_n - u_{n+1}$ où $u_n = \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$.

8. On écrit $n^2 + 1 = n^2(1 + 1/n^2)$ etc. et on fait un développement limité à l'ordre 1 en $1/n$ pour conclure que les deux séries divergent (en fait grossièrement si $a \neq 0$).

9. La série converge absolument. Pour la somme on utilise $\cos(\alpha) = \Re e(e^{i\alpha})$ et on somme une série géométrique.

10. Même idée qu'au 8.

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+a^2} &= n\cdot\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\\ &= n\cdot\big(1+\frac{a^2}{2n^2}-\frac{a^2}{8n^4}+o(\frac{1}{n^4})\big)\\ &= n+\frac{a^2}{2n}-\frac{a^2}{8n^3}+o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}u_n &= \sin(\pi\sqrt{a^2+n^2})\\ &= (-1)^n\sin\big(\frac{\pi a^2}{2n}-\frac{\pi a^2}{8n^3}+o(\frac{1}{n^3})\big)\\ &= (-1)^n\frac{\pi a^2}{2n}+(-1)^n\frac{K}{n^3}o(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

Avec K une constante à déterminer. On voit donc que $\sum u_n$ est la somme d'une série alternée convergente et d'une série absolument convergente (un $O(1/n^3)$)...

11. On fait un développement limité pour $\sum u_n$ pour voir qu'elle converge. Par contre $\sum v_n$ diverge grossièrement.

12. On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{x(4x^2-1)}=\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{x}$$

ensuite on utilise le fait (indication !) qu'il existe une constante A telle que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\longrightarrow+\infty}{=}\ln(n)+A+o(1)$$

et qu'on a ensuite :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\\ &= \sum_{\ell=1}^{2n}\frac{1}{\ell}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\\ &= \ln(2n)+A+o(1)-\frac{1}{2}\ln(n)-\frac{A}{2}+o(1)\\ &= \ln(2)+\frac{1}{2}\ln(n)+\frac{A}{2}+o(1)\end{aligned}$$

13. On a $n^2+2n\cos\theta-\sin^2\theta=(n+\cos\theta)^2-1$ et ensuite :

$$u_n=\frac{1}{n^2+2n\cos\theta-\sin^2\theta}=-\frac{1}{n+1+\cos\theta}+\frac{1}{n-1+\cos\theta}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}u_k$...

14. a) Alternée : on a $\ln(1+x)$ est du signe de x, donc u_n est du signe de $(-1)^n$.

b) Utiliser le théorème spécial paraît difficile. On fait donc un développement limité :

$$\begin{aligned}u_n &= \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^2+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\ &= \frac{(-1)^n}{n}-v_n\end{aligned}$$

Avec $v_n\sim\dfrac{1}{2n^2}$. Donc, par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum v_n$ converge et comme $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$

converge, il en est de même pour $\sum u_n$.

c) Observons :

$$\begin{aligned}
u_{2n-1} + u_{2n} &= \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right) + \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \\
&= \ln(n-1) - \ln(n) \\
&\qquad + \ln(2n+1) - \ln(2(n-1)+1)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{2n} u_k &= u_2 + (u_3 + u_4) + \cdots + (u_{2n-1} + u_{2n}) \\
&= u_2 + \sum_{\ell=2}^{n} u_{2\ell-1} + u_{2\ell} \\
&= u_2 + \ln(1) - \ln(n) + \ln(2n+1) - \ln(3) \\
&= \ln\bigl(\frac{3}{2}\bigr) + \ln\bigl(2 + \frac{1}{n}\bigr) - \ln(3) \\
&= \ln\bigl(1 + \frac{1}{2n}\bigr)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 0$$

15. a) Comme au 8 on fait un développement limité à l'ordre 2 en $1/n$:

$$u_n = (1+a+b)\sqrt{n} + (\frac{1}{2}a + b)\frac{1}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^{3/2}})$$

Donc $\sum u_n$ ne peut converger que ssi $1+a+b = a/2+b = 0$ c'est à dire $(a,b) = (-2,1)$.

b) On a alors : $u_n = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ et donc $\sum u_n$ est télescopique.

16. a) On remarque que $v_n = w_n - w_{n-1}$ où $w_n = \dfrac{1}{(1+u_0)\cdots(1+u_n)}$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = 1 - w_n$.

b) Si $u_n \leq 0$ alors la suite (w_n) est décroissante positive et donc convergente. La série $\sum v_n$ est donc convergente.

c) Ici : erreur d'énoncé, on ne veut que $\sum v_n$ converge. On utilise le fait que $\ln(w_n) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)$. Il ne reste plus qu'à montrer que la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge.

d) Même principe, on utilise $\ln(1+x) = x - x^2/2 + ...$

17. Dans l'ordre converge, diverge et converge si et seulement si $a < 1$.

18. Voir 16.c, d.

19. Reste d'une série convergente et voir le cours pour la recherche de l'équivalent.

20. On reconnaît un produit de Cauchy. Celui de $\sum \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n!}$. Attention ici, $u_n = 1/n^2$ quand $n \geq 1$ et $u_0 = 0$. On a alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ qui vaut w_n...

21. a) La suite (x_n) est positive et majorée par $1/(n+1)$. Par encadrement elle converge vers 0.

b) Donc $e^{-x_n} \longrightarrow 1$ et donc $x_n \sim 1/n$.

c) La série $\sum x_n$ est donc divergente.

22. Il faut rechercher un équivalent à $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$. On le fait en encadrant à l'aide de l'intégrale $\int_1^n \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.
    On voit alors que $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 5/2$.
23. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}$.
24. On encadre brutalement : pour tout $t \in [2n, 3n]$,
$$1 + 4(2n)^{2/3} \leq 2 + \cos(2t) + 2t^{2/3} \leq 3 + 4(3n)^{2/3}$$
    Donc :
$$u_n \geq \frac{n}{3 + 4(3n)^{2/3}} \sim K n^{1/3}$$
    De ce fait $\sum u_n$ diverge : on la minore par une série positive grossièrement divergente.
25. a) On a $\sin^2 + \cos^2 = 1$, donc $\alpha = \arccos(\sqrt{1-x^2})$ est tel que $\cos^2(\alpha) = 1 - x^2$ et donc $x^2 = \sin^2 \alpha$. Comme $\sin \alpha > 0$, on a $\sin(\alpha) = x$ et finalement $\alpha = \arcsin(x)$.
    b) On sait que $\arcsin(u) \sim u$ quand $u \longrightarrow 0$. On a donc $u_n \sim 1/n^2$ et donc ... $\sum u_n$ converge.
26. Faisons le changement de variables $s = \sqrt{n}t$, on a :
$$u_n = \int_{1/\sqrt{n}}^{1} e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^{\sqrt{n}} e^{s^2}\,\mathrm{d}t.$$
    Comme $K = \int_1^{+\infty} e^{-t^2}$ converge, on a $u_n \sim \frac{K}{\sqrt{n}}$ et donc ... $\sum u_n$ diverge.

27. On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k} &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}} \\
&= \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \left(1 - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)^2 + o(\frac{1}{k})\right) \\
&= \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k} + o(\frac{1}{k})
\end{aligned}$$

La série est donc la somme d'une série convergente et d'une série ... divergente : elle est donc divergente.