Feuille d'exercices numéro 4
Réduction des endomorphismes

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminez les valeurs propres de A. Est-elle diagonalisable ? Calculez A^n.

2. Pour quelles valeurs de m la matrice
$$B = \begin{pmatrix} -m & 0 & -2-m \\ m & 1 & m \\ m+1 & -1 & m+3 \end{pmatrix}$$
est-elle diagonalisable ? Si oui, donnez la forme diagonale et la matrice de passage.

3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Si oui, donnez la forme diagonale et la matrice de passage.

4. Déterminez les sous-espaces vectoriels stables par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. (ESCP 1993) $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$ est muni de sa base canonique
$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4).$$

On considère les vecteurs

$$\begin{aligned} f_1 &= (1,1,1,1), \\ f_2 &= (1,1,-1,-1), \\ f_3 &= (1,-1,1,-1), \\ f_4 &= (1,-1,-1,1). \end{aligned}$$

a) Montrez que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E.
Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(e_i) = f_i$.
b) Déterminez l'endomorphisme u^2.
c) Déterminez la matrice de u^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
d) Déterminez la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$.
e) On considère quatre suite réelles définies par leurs valeurs initiales et les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{4}(x_n + y_n + z_n + t_n) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{4}(x_n + y_n - z_n - t_n) \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{4}(x_n - y_n + z_n - t_n) \\ t_{n+1} = \dfrac{1}{4}(x_n - y_n - z_n + t_n) \end{cases}$$

En utilisant u montrez que ces quatre suites convergent vers 0.
f) Déterminez les valeurs propres de u et une base e chacun des sous-espaces propres associés. u est-il diagonalisable ?

6. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un élément non nul de $\mathbb{R}^n$. Diagonalisez la matrice carrée de taille n de terme général $a_{i,j} = \alpha_i \cdot \alpha_j$.
7. (CCP 2004, variante de 6) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j} = i/j$.
   a) Calculer A^2.
   b) A est-elle inversible ?

c) Déterminer $\mathrm{rg}(A)$, $\dim(\ker(A))$.

d) A est-elle diagonalisable ?

8. Trouvez $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. (CCP 2000) soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 2 & 10 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminez trois vecteurs non nuls V_1, V_2 et V_3 tels que $AV_1 = V_1$, $AV_2 = 4V_2$ et $AV_3 = 4V_3 + V_2$.

b) Montrez que $\{V_1, V_2, V_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Si a est la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donnez la matrice B de u dans la nouvelle base. Quel lien existe entre A et B ?

10. (CCP 2002) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

b) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

c) Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = A$. Montrer que A et X commutent et que tout vecteur propre de A est vecteur propre de X.

11. (Centrale 2002) Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & -1 \\ 1 & 2a-1 & 1 \\ 2 & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de A. A est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer $\mathrm{F} = \ker(f - a\,\mathrm{Id})$, puis $G = \ker(f - a\,\mathrm{Id})^2$ et enfin $\ker(f - a\,\mathrm{Id})^3$.

c) Montrer que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

12. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que A admet trois valeurs propres distinctes a, b et c. Exprimer A^n comme combinaison linéaire de I_3, A et A^2.
13. (CCP 2002) Valeurs propres et sous-espaces propres de

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

14. (CCP 2003, 2004) On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant $u_{n+1} = v_n + 3w_n$, $v_{n+1} = u_n/2$, $w_{n+1} = v_n/3$ et $u_0 = v_0 = w_0 = 100$. On note X_n la colonne associée à (u_n, v_n, w_n).
   a) Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.
   b) Montrer que la suite (X_n) converge (dans $\mathbb{C}^3$)
   c) Donner la limite de la suite (X_n) et conclure.
15. (CCP 2005) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.
   a) Si D est une matrice diagonale à deux éléments diagonaux distincts, quel est le commutant [1] de D ?
   b) résoudre $M^3 - 2M = A$.
16. (TPE 2005) Déterminer les sous-espaces stables par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. L'ensemble des matrices qui commutent avec

17. (Centrale 2005, modifié pour coller au programme) Soit $A \in \mathcal{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = 8$ et $A^4 = 3A^3 - 2A^2$.
    a) Rappeler pourquoi A est trigonalisable. Déterminer les valeurs propres possibles de A. Donner le polynôme caractéristique de A.
    b) Quel est le rang de $A^2 - A$?
    c) Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.
18. (CCP 2005) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 - 2A + I_n = 0$.
    a) Donner le spectre de A.
    b) Donner une matrice non diagonalisable vérifiant $A^2 - 2A + I_n = 0$.
    c) Retour au cas général : calculer A^n en fonction de A et I_n pour $n \in \mathbb{Z}$.
19. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$
    Calculez $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!}$.
20. Soient
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$$
    B est-elle diagonalisable ?
21. a) Déterminez le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 6X + 5$.
    Soient
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$$
    b) Calculez A^n et B^n. B est-elle diagonalisable ?
22. Diagonaliser $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto {}^tA$.

23. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un naturel non nul k vérifiant $A^k = I_n$. Montrez que $A^2 = I_n$.
24. On suppose $n \geq 2$. Soient U et V deux vecteurs colonnes non nuls de $\mathbb{R}^n$, a un réel non nul et $H = I_n - a \cdot U \cdot {}^tV$.
    a) Calculez $U \cdot {}^tV$.
    b) Calculez H^2 en fonction de H et I_n. En déduire l'inverse de H lorsque c'est possible (discuter selon les valeurs de a).
    c) Trouvez les éléments propres de H.
    d) Calculez $\det(H)$.
25. À quelle condition la somme de deux vecteurs propres de f est-elle encore un vecteur propre de f ?
26. Soit f défini sur $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = (X-a)(P'+P'(a)) - 2(P - P(a))$ ($a \in \mathbb{R}$ fixé). déterminez l'image et le noyau de f. f est-il diagonalisable ?
27. (CCP 2001) Soit u définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = P'$ et v définie par $v(P) = P(X)+P(X+1)$. Déterminez les éléments propres de u et v.
28. (CCP 2001) Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

29. (Mines 2005) soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle et telle que $A^3 = -A$. Montrer que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

30. (CCP 2002) Diagonaliser

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & (1) & \\ & (1) & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

31. (CCP 2002) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_n = 0$. Donner $\mathrm{rg}(M)$, $\mathrm{tr}(M)$ et $\det(M)$.

32. (CCP 2003, 2004) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'inconnue de l'équation $X^2 - 3X = A$.
   a) Montrer toute toute solution commute avec A.
   b) Résoudre l'équation.

33. (CCP 2003, 2005) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ (n \geq 2)$$

   a) A est-elle diagonalisable ?
   b) Déterminer le rang de A et une base de $\ker(A)$.
   c) Trouver un réel γ tel que $A^3 - \gamma A = 0$.
   d) Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.
   e) On note $\mathbb{R}[A]$ l'ensemble des matrices de la forme $P(A)$ où P est un polynôme. Déterminer $\dim(\mathbb{R}[A])$.
   f) Soit $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$. Montrer que $M \in \mathcal{C}_A$ si et seulement si chacun des sous-espaces propres de A est stable par M. En déduire $\dim(\mathcal{C}_A)$.

34. (Mines 2003) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.
35. (Mines 2003) Soit E un espace vectoriel de dimension n, p un projecteur de rang $r \neq 0$ et $r \neq n$. Soit $\varphi : f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \longmapsto -p \circ f + f \circ p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Déterminer les valeurs propres de f ainsi que les dimensions des sous-espaces propres associés.
36. (CCP 2004) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. Quelles sont les valeurs possibles de $\mathrm{tr}(u)$?
37. (IIE 2005) soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ tel que $u^3 = -u$.
    a) Déterminer le spectre de u.
    b) Démontrer $\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.
    c) Déterminer le rang de u.
    d) Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ $X^3 = -X$.
38. (TPE 2005) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^{3n}$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 2n$ et $u^3 = -u$.
    a) Monter que 0 est valeur propre de u. Quel est son ordre de multiplicité ?
    b) Montrer que la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^{3n}$ est semblable à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$$

39. (Centrale 2005) Soient

$$A = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$$

    A et B sont-elles diagonalisables ?