Feuille d'exercices numéro 4
Corrigés et indications partiels

1. On a $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 4, 6\}$. A a donc autant de valeurs propres que son ordre : elle est diagonalisable. Pour calculer A^n : deux méthodes PD^nP^{-1} ou ($\simeq$ HP) remarquer que $(X-2)(X-4)(X-6)$ est annulateur de A...
2. 2 est valeur propre de B (observer $C_1 - C_3$ dans le calcul de χ_B). Ensuite on factorise le polynôme caractéristique : $\chi_B = (X-2)(X^2-2X+m+1) = (X-2)((X-1)^2+m)$. On a trois cas : 3 valeurs propres réelles distinctes ($m < 0$ et $m \neq -1$) , 2 réelles dont une double ($m = 0$ ou $m = -1$) et 1 réelle et 2 complexes...
3. A est symétrique réelle donc... $\chi_A = (X-1)(X-4)^2$.
4. Difficile... $\chi_M = X(X-1)^2$.
5. a) On calcule le déterminant de $\mathcal{C}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

   b) La matrice U de u a été calculée à la question précédente : c'est celle dont on a cherché le déterminant. On calcule U^2...

   c) La relation trouvée avant permet de calculer U^{-1} et donc de donner u^{-1}.

   d) On calcule (avec des notations évidentes) UF_k et on les exprime en fonction des F_i...

   e) Toujours avec des notations évidentes, on a $X_{n+1} = \dfrac{1}{4}UX_n$.
   On a alors $X_{n+2} = \dfrac{1}{4}X_n$...

   f) U est symétrique réelle donc... La deuxième question donne $\mathrm{Sp}\, u \subset \{\pm 2\}$.

6. A est symétrique réelle donc... Voir aussi que $A = U \cdot {}^tU$ où U est la colonne associée à $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Il faut résoudre le système $AX = \lambda X$ qui est alors $U \cdot ({}^tUX) = \lambda X$. De deux choses l'une : soit $\lambda = {}^tUX = 0$ soit X est un multiple de U
7. a) $A^2 = nA$.
   b) Si A était inversible on pourrait multiplier l'équation précédente par A^{-1}...
   c) Voir la question précédente...
   d) Toutes les colonnes sont proportionnelles donc...
8. On en cherche **une**. On commence par voir que M^2 est diagonalisable. On écrit $M^2 = PDP^{-1}$, puis on cherche Δ, diagonale telle que $\Delta^2 = D$...
9. a) On analyse la question posée pour voir que V_1, V_2 sont propres pour A. On les trouve via une méthode appropriée, puis on résout le système correspondant à $AV_3 - 2V_3 = V_2$...
   b) Un petit déterminant...
   c) On analyse la première question pour voir que :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Et on se souvient qu'on a changé de base...
10. a) On a $\chi_A = X^2 - 2X + 2 = (X-1)2 + 1 = (X - 1 + i)(X - 1 - i)$.
    b) Pas de valeurs propres réelles donc...
    c) $AX = X^3 = \ldots$
11. a) $\chi_A = (X - a)^3$...
    b) $F = \text{vect}\{\}$, $G = \text{vect}\{\}$.
13. $\text{Sp}(A) = \left\{(a+b)^2, (a-b)^2, a^2 - b^2\right\}$. Les vecteurs propres associés sont $(1,1,1,1)$, $(1,-1,-1,1)$, $(1,0,0,-1)$ et $(0,1,-1,0)$...

14. a) On cherche A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
    b) On diagonalise A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, pour trouver $A = PDP^{-1}$. On a ensuite $X_n = PD^nP^{-1}X_0$...
    c) On est amené à calculer $P\lim(D^n)P^{-1}$...
15. Pour le b. on commence par diagonaliser $A = PDP^{-1}$. L'équation $M^3 - 2M = A$ devient alors $N^3 - 2N = D$ où $M = PNP^{-1}$. En remarquant qu'on a $ND = DN$, on trouve la forme de$N$...
16. A est diagonalisable (et possède une valeur propre double) On se sert du cours.
17. a) A est inversible donc elle vérifie l'équation $A^2 = 3A - 2I$. $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$, donc son polynôme caractéristique est scindé, la matrice A est donc trigonalisable. En considérant la forme triangulaire de A, on observe que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, 2\}$. Donc $\chi_A(x) = (x-1)^p(x-2)^q$ avec $p + q = 6$. Puis on se sert de $\mathrm{tr}(A) = 8 = p \cdot 1 + q \cdot 2$ pour le déterminer complètement.
    b) A est inversible donc $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(M)$...
    c) On fait la division euclidienne de X^k par $X^2 - 3X + 2$.
18. a) Le polynôme annulateur permet de dire que $^{(}A) \subset \{1\}$. Comme le polynôme caractéristique de A est scindé, on a au moins une valeur propre. Conclusion $^{(}A) = \{1\}$ et $\chi_A = (X-1)^n$.
    b) Pour $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient. Pour n quelconque, $A = I + J$, où $J^2 = 0$ convient. Pour J prendre la patrice ou tous les cofficients sont nuls sauf celui $(1, n)$.
    c) Voir le 17.c...
20. On cherche d'abord les éléments propres de A. Ensuite on cherche à résoudre :

$$B\left(\begin{array}{c} X \\ \hdashline Y \end{array}\right) = \lambda\left(\begin{array}{c} X \\ \hdashline Y \end{array}\right) \text{ càd } \left(\begin{array}{c:c} A & A \\ \hdashline A & A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} X \\ \hdashline Y \end{array}\right) = \lambda\left(\begin{array}{c} X \\ \hdashline Y \end{array}\right)$$

On voit alors que $2A(X+Y) = \lambda(X+Y)$ et donc soit $\lambda/2 \in \mathrm{Sp}(A)$ soit $\lambda = 0$ et $X+Y \in \ker(A)$...

22. $f^2 = \mathrm{Id}$...
23. Diagonaliser... Que dire alors des valeurs propres de A ?
25. Notons x et y ces deux vecteurs propres. On veut donc avoir à la fois :

$$f(x) = \alpha x,\ f(y) = \beta y,\ f(x+y) = \gamma(x+y).$$

On discute selon que la famille (x, y) est libre ou pas.
   a) Si la famille est liée, on a forcément $\alpha = \beta = \gamma$: on ne change pas de sous-espace propre.
   b) Si elle est libre, on utilise $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour avoir $\gamma x + \gamma y = \alpha x + \beta y$ et en déduire $\alpha = \gamma = \beta$: on ne change toujours pas de sous-espace propre...
26. On voit rapidement [1] que $f(P)$ admet a comme racine triple. On a alors l'idée de calculer la matrice de f dans la base $(1, (X-a), (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$...
27. On calcule la matrice de u et v relativement à la base canonique...
28. On cherche d'abord le spectre, puis on détermine la dimension des sous-espaces propres en observant le rang de $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$...
29. Des idées :
   a) On remarque que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   b) Notons φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ associé à A. Si on note $w = u + iv$ (notation évidente) un vecteur propre associé à i alors $\overline{w} = u - iv$ est un vecteur propre associé à ... Que valent $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$?
30. Écrire $A = J - I_n$ où $J = (1)$. Il faut connaître les éléments propres de J.

1. C'est en fait un exercice classique

31. On passe par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on trigonalise, on détermine les valeurs propres possibles et les conditions issues de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On trouve alors :

$$\mathrm{rg}(M) = n,\ \mathrm{tr}(M) = -n/2,\ \det(M) = 1$$

32. a) Se rappeler que si X solution alors $AX = (X^2 - 3X)X = ...$
    b) Diagonaliser A, résoudre $Y^2 - 3Y = D$ (Y va commuter avec D et alors Y sera...), puis reconstruire $A = PDP^{-1}$.
33. a) Cours.
    b) Lire A.
    c) Calculer A^2 puis A^3...
    d) On a polynôme annulateur. On déduit donc les valeurs propres potentielles : $\{0, \pm\sqrt{n-1}\}$. On a déjà $\ker(A)$. Reste à résoudre $AX = \pm\sqrt{n-1}X$. On tombera sur :

$$\ker(A - \varepsilon\sqrt{n-1}I_n) = \mathrm{vect}\left\{(\varepsilon\sqrt{n-1}, 1, \dots, 1)\right\}$$

    e) Le c. nous permet de dire que $\mathbb{R}[A] = \mathrm{vect}\left\{I_n, A, A^2\right\}$
    f) On trouve $\dim(\mathcal{C}(A)) = (n-1)^2 + 1 + 1$...
34. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on trigonalise A. Ne pas oublier les informations sur les valeurs propres complexes.
35. Le mieux c'est de prendre une base adaptée à $\mathrm{E} = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$ et de voir, en calculant par blocs l'allure de la matrice de $\varphi(f)$ à partir de celle de f.
36. On considère la matrice U de u dans une base arbitraire de $\mathbb{R}^3$. On étudie alors U comme matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$... Le polynôme annulateur donne les candidats pour les valeurs propres complexes de U. On peut alors calculer $\mathrm{tr}(U) = \mathrm{tr}(u)$... Les valeurs possibles de $\mathrm{tr}(u)$ sont 0 et -1.