Feuille d'exercices numéro 3
Probabilités

Dans tous les exercices et sauf mention contraire, si Ω est l'univers choisi, $\mathcal{P}(\Omega)$ sera la tribu à utiliser.

I Urnes, dés, etc.

Partie A Jeux de boules

1. On tire trois boules avec remise d'une urne contenant cinq boules numérotées de 1 à 5 et on note A_i l'événement « la i^{e} boule tirée porte le numéro 1 ».
   Exprimer en fonction de A_i les événements
   a) B : « on obtient trois fois la boule numéro 1 ».
   b) C : « on obtient au moins une fois la boule numéro 1 ».
   c) D : « on obtient une seule fois la boule numéro 1 ».
   d) E : « on obtient la boule numéro 1 pour la première fois au deuxième tirage ».
   e) F : « on obtient la boule numéro 1 pour la première fois au troisième tirage ».
   f) G : « on obtient la boule numéro 1 au premier tirage ou alors n'est pas obtenue ».
2. Une urne contient deux jetons portant le numéro 1, trois jetons 2, un jeton 3 et cinq jetons 4.
   a) On tire au hasard un jeton de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer un numéro pair ?
   b) On tire simultanément deux jetons de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois le même numéro ?
3. On tire avec remise deux jetons d'une urne contenant sept jetons numérotés de 1 à 7.

a) Quelle est la probabilité de tirer deux fois le même jeton ?

b) Quelle est la probabilité que le premier jeton tiré ait un numéro strictement inférieur au second ?

4. On pioche simultanément trois boules d'une urne contenant quatre boules blanches, trois boules noires et deux boules rouges. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche et une boule rouge ?
5. Une urne contient dix boules dont six blanches et quatre noires. On effectue dans l'urne n tirages d'une boule avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir

   a) aucune boule blanche ?

   b) une boule blanche suivie de $n-1$ boules noires ?

   c) une seule boule blanche ?

   d) k boules blanches suivies de $n-k$ boules noires ?

   e) k boules blanches ?

Partie B Jeux de dés

6. On lance deux fois un dé honnête. On suppose alors que l'univers est $\Omega = [\![1,6]\!]^2$.

   a) Trouver un libellé pour l'événement

$$A = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6)\}.$$

   b) À quelle partie de Ω correspond l'événement B : « la somme des deux numéros est inférieure ou égale à 4 » ?

   c) Calculer la probabilité des événements A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$ (attention bien lire « A privé de B » et pas autre chose de plus exotique !).

7. On lance trois fois de suite un dé honnête. On suppose alors que l'univers est $\Omega = [\![1,6]\!]^3$.

   a) À quelles parties de Ω correspondent les événements

i) A : « On n'obtient pas d'as au cours des trois lancers ».

ii) B : « On obtient exactement deux as ».

iii) C : « On obtient un as aux deuxième et troisième lancers ».

b) Calculer la probabilité de ces événements.

8. On lance deux dés. Quelle est la probabilité que la somme soit

a) paire ?

b) un multiple de 3 ?

9. On lance un dé quatre fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre numéros différents ?

10. On lance deux dés n fois de suite ($n \geq 2$). Quelle est la probabilité d'obtenir

a) Un seul double six ?

b) au moins deux double six ?

c) exactement un double six et un double cinq ?

11. Six personnes lancent chacune un dé. Quelle est la probabilité

a) que toutes obtiennent un six ?

b) que le six soit obtenu par au moins l'une d'entre elles ?

c) que ni le six ni le cinq ne sortent ?

d) que les six personnes obtiennent des numéros différents ?

Partie C Autres exercices

12. On répartit au hasard quatre boules dans trois boites numérotées de 1 à 3. quelle est la probabilité que la première ou la seconde boite restent vides ?

13. On choisit au hasard un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$ ($n \geq 2$). Quelle est la probabilité que ce sous ensemble

a) contienne 12 et 2 ?

b) ne contienne ni 1 ni 2 ?

c) contienne 1 ou 2 ?

14. Une pâtissière a laissé tomber sa bague dans un pâte à gâteaux qu'elle a ensuite versé dans deux moules ronds. L'un de 40 cm et l'autre de 30 cm de diamètre. Les deux gâteaux une fois cuits ont même hauteur et sont découpés chacun en 16 parts. Quelle chance (en pourcentage) a-t-on de trouver la bague si l'on reçoit

    a) une petite part ?

    b) une grande part ?

15. Pierre et Paul jouent à pile ou face. chacun lance n fois une pièce de monnaie équilibrée ($n \in \mathbb{N}^*$) et le gagnant est celui qui obtient le plus de *pile*.

    a) Quelle est la probabilité d'un ex-æquo ?

    b) Quelle est la probabilité que Pierre gagne ?

16. Dix livres sont rangés sur le rayon d'une bibliothèque. On les enlève pour épousseter l'étagère puis on les replace au hasard. Quelle est la probabilité

    a) que le i^e retrouve sa place ?

    b) que le i^e et j^e ($i \neq j$) retrouvent leur place ?

    c) que tous retrouvent leur place ?

    d) qu'aucun ne retrouve sa place ?

17. On joue deux fois de suite à pile ou face avec une pièce honnête et on considère les trois événements

    — F_1 : « on a Face au premier jet » ;
    — F_2 : « on a Face au second jet » ;
    — D : « on a deux Face ou deux Pile ».

    Ces trois événements sont ils

    a) deux à deux indépendants ?

    b) mutuellement indépendants ?

II Conditionnement

18. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A, B et C trois événements tels que $\mathbb{P}(A \cap C) \neq 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}_A(B \mid C) = \mathbb{P}_{A\cap C}(B).$$

19. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A, B deux événements incompatibles. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si l'un des deux est presque impossible.
20. On permute au hasard n éléments ordonnés d'un ensemble $\mathrm{E} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.
    a) Sachant que u_1 retrouve sa place, quelle est la probabilité que u_2 retrouve la sienne ?
    b) Quelle est la probabilité que u_2 retrouve sa place sachant que u_1 n'a pas retrouvé la sienne ?
21. On dispose de quatre commodes ayant chacune trois tiroirs. Un objet est caché dans l'une d'entre elles. On fouille les deux premiers tiroirs de l'une de ces commodes sans rien trouver. Quelle est la probabilité que l'objet se trouve dans le troisième tiroir de cette commode ?
22. Une urne contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. On en sort deux sans noter leur numéro.
    a) Quelle est la probabilité qu'un troisième jeton tiré de l'urne soit pair ?
    b) Sachant que l'un au moins des trois jetons sortis est impair, quelle est la probabilité qu'ils soient impairs tous les trois ?
23. On pose une question à un candidat qui a une probabilité p d'être un tricheur. On admet que si cet individu est un tricher il connaît à l'avance la question et sa réponse ; sinon il a une chance sur douze de répondre correctement.
    a) Quelle est la probabilité que le candidat choisi donne la bonne réponse ?

b) Sachant que le candidat a répondu correctement, quelle est la probabilité qu'il ait triché ?

24. On dispose de n urnes U_1, U_2, $\ldots$, U_n contenant chacune trois boules. Toutes les boules sont blanches, sauf une qui est noire. On ne sait pas dans quelle urne se trouve la boule noire.
    a) On tire sans remise deux boules de U_1, quelle est la probabilité qu'elles soient toutes deux blanches ?
    b) Sachant qu'on a tiré deux boules blanches de U_1, quelle est la probabilité que U_1 contienne la boule noire ? que U_2 contienne la boule noire ?
    c) Que se passe-t-il si au départ on a 2, 3 puis p ($p \leq 3n$) boules blanches en tout ?
25. Un loup chasse dans trois alpages A, B et C. Il ne chasse jamais deux jours de suite dans le même alpage, mais si il dévore un agneau dans B ou C, il y a deux fois plus de chances que le lendemain il chasse dans A (les autres cas sont supposés équiprobables). Quel est l'alpage le plus sur ?
26. Une puce se déplace entre trois points A, B et C. Au départ elle est en A. À chaque étape, elle quitte sa position et gagne indifféremment l'un des deux autres points. On note α_n, β_n et γ_n les probabilités qu'elle se trouve respectivement en A, B et C à l'issue de la n^{e} étape (on pose $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = \gamma_0 = 0$).
    a) Calculer α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2.
    b) Exprimer α_{n+1}, β_{n+1} et γ_{n+1} en fonction de α_n, β_n et γ_n.
    c) Calculer α_n, β_n et γ_n en fonction de n.
27. On dispose de $N+1$ urnes U_0, U_1, $\ldots$, U_N ; l'urne k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On tire une boule de l'une de ces urnes choisie au hasard.
    a) Quelle est la probabilité que cette boule soit blanche ?
    b) Sachant qu'elle est blanche, quelle est la probabilité de l'avoir tirée de U_0 (respectivement de U_N) ?

28. Un livre de 200 pages contient n erreurs.
    a) Quelle est, en fonction de n la probabilité qu'il y ait une erreur (au moins) dans la première page ?
    b) Quel est le nombre maximal d'erreurs que peut contenir ce livre si l'on veut que la probabilité qu'il y ait une erreur dès la première page soit inférieure à $0,05 = 5\%$?
29. Une urne contient au départ une boule noire et une boule blanche. On y effectue une série de tirages de la manière suivante : si on tire une boule blanche, on la remet avec deux autres boules blanches ; si on tire une boule noire, on la remet avec une seule boule noire. Soit A_i l'événement « la i^{e} boule tirée est blanche ».
    a) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_2)$ et $\mathbb{P}(A_3)$.
    b) Sachant que la seconde boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la troisième soit blanche ? Sachant que la troisième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première ait été blanche ?
30. On lance un dé à six faces. Si le dé amène le numéro k, on lance k fois une pièce de monnaie avec laquelle la probabilité d'amener pile est $1/3$. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un pile ?
31. Trois étangs contiennent respectivement 1, 2 et 3 poissons. On choisit un étang et on prélève un poisson que l'on marque et que l'on relâche. Le lendemain on prend à nouveau un étang au hasard et on prélève un poisson. Quelle est la probabilité que l'étang choisi contienne 1, 2 ou 3 poissons sachant que
    a) le poisson est non marqué ;
    b) le poisson est marque.
32. Une urne contient $n-1$ boules blanches et 1 boule noire. On tire les n boules de l'urne une à une sans remise. Quelle est la probabilité p_k que la boule noire sorte au k^{e} tirage ?

33. Une urne contient n boules blanches et p boules noires. On prélève toutes les boules une par une et sans remise. Calculer, en fonction de k, les probabilités des événements
   a) La première boule noire sort au k^e tirage,
   b) La dernière boule noire sort au k^e tirage
34. On dispose de 3 lots de blé contenant une proportion variable de grains pourris.
   Lot 1 : 60% de grains pourris
   Lot 2 : 10%
   Lot 3 : 40%
   On tire 3 grains dans un lot, 2 sont pourris. Quelle est la probabilité qu'ils viennent du lot 1 ?
35. On dispose d'une pièce de monnaie honnête et on joue à pile ou face. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n le nombre de possibilités d'obtenir n jets sans obtenir deux piles consécutifs. On convient que $f_0 = 1$.
   a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Indication : On pourra examiner le dernier jet.
   b) Que vaut f_1 ? Déterminer f_n en fonction de n.
   c) Calculer la probabilité p_n d'obtenir n jets sans deux piles consécutifs avec une pièce de monnaie équilibrée. Donner un équivalent de p_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.