Feuille d'exercices numéro 9
Orthogonalité

I Espaces préhilbertiens

1. $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, $\langle f\,,g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Montrez que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit B l'ensemble des suites à termes réels bornées.
   a) Montrez que l'application
   $$\langle\cdot\,,\cdot\rangle : (u,v)\in B^2 \longmapsto \langle u\,,v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n v_n}{2^n}$$
   est un produit scalaire sur B (vous commencerez par montrer qu'elle est bien définie, c'est-à-dire que $\langle u\,,v\rangle$ a bien un sens).
   b) Soit F le sous-espace vectoriel des suite nulles à partir d'un certain rang. Calculez $\mathrm{F}^{\perp}$. Déduisez-en que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.
3. (CCP 2000) Soient a_0, a_1, …, a_n des réels (distincts ou non). Pour $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2$, on pose
   $$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k).$$
   a) Montrez que φ est un produit scalaire.
   b) Montrez qu'il existe une unique base $(P_0,\dots,P_n)$ telle que P_k soit de degré k et de coefficient dominant positif.

c) Calculez les polynômes P_k pour $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = a$.

4. L'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique $(A, B) = \operatorname{tr}(A^\mathsf{T} \cdot B)$.
   a) Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques. Montrez que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux de E.
   b) Calculez la distance de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
5. $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[X]$, $\langle P\,, Q\rangle = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1)$.
   a) Montrez que $(\mathrm{E}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien.
   b) Trouvez une base orthonormée (P_0, P_1, P_2) telle que pour tout k, $d^\circ(P_k) = k$.
6. (CCP 2002) soit A une matrice symétrique réelle, définie positive, et soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. On pose

$$\varphi(x,y) = -\det \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & y_1 & \cdots & y_n \\ \hline x_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ x_n & & & \end{array}\right)$$

   Montrez que φ est un produit scalaire.
7. (CCP 2005) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Soient v_1, …, v_p des vecteurs de E. On note $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$. On pose $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ avec $m_{ij} = \langle v_i\,, v_j\rangle$ et on appelle H la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des v_k exprimées dans la base $\mathcal{B}$.
   a) Montrer que $M = H^\mathsf{T} \cdot H$.
   b) Montrer que M et H on même noyau, puis que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(H)$.

c) En déduire que $\mathrm{rg}(V) = \mathrm{rg}(M)$.

8. (TPE 2005) Comparer $\mathrm{Ker}(A^{\mathsf{T}}A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ d'une part et $\mathrm{Im}(A^{\mathsf{T}}A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ d'autre part.
9. (CCP 2005) Soit
$$\mathrm{E} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - t = 2x - z + t = 0\right\}.$$
a) Montrer que E est un espace vectoriel. Trouver une famille génératrice puis une base de E.

b) Si $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire usuel, déterminer une base orthogonale de E.

II Espaces euclidiens, projecteurs orthogonaux

10. Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$. Soit $f : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)^2$.

a) Exprimez $f(a, b)$ à l'aide de la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrez que $f(a, b)$ a un minimum en un unique point (a_0, b_0) que vous déterminerez.

11. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ de matrice relativement aux bases canoniques $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Déterminer $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|b - f(u)\|$ soit minimal.
12. Soit E un espace euclidien et p, q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que les quatre propriétés suivantes sont

équivalentes :

$$\begin{array}{ll} (1) & (q-p) \text{ est un projecteur orthogonal} \\ (2) & \forall x \in \mathrm{E},\ \langle (q-p)(x)\,, x\rangle \geq 0 \\ (3) & \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q \\ (4) & q \circ p = p. \end{array}$$

13. (CCP 2004) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n rapporté à la base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (u_1, \ldots, u_n)$. Soit H l'hyperplan de E d'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$ dans la base $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ la famille de vecteurs $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ définie par $e_k = u_1 - u_{k+1}$.
    a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de H.
    b) Construire une base orthonormée de H à partir de $\mathcal{B}$.
    c) Déterminer la projection orthogonale de u_n sur H.
    d) Retrouver ce résultat à l'aide de la projection orthogonale de u_n sur $H^{\perp}$.
14. (CCP 2002) Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ soit F l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^4$ dont les coordonnées vérifient

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

    a) Déterminer une base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de F.
    b) Donner la matrice A de la projection orthogonale p sur F.
    c) Soit $\{v_3, v_4\}$ une base de $\mathrm{F}^{\perp}$ et $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Déterminer la matrice B de p dans $\mathcal{B}'$. Donner une relation entre A et B.
15. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit F le sous-espace vectoriel de E d'équation :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{array} \right.$$

a) Déterminez une base orthonormée de F.

b) Donnez la matrice, dans la base canonique de E, de la projection orthogonale p sur F.

c) Soit $u = (1, 1, 1, 1)$. Calculez $d(u, \mathrm{F})$.

16. (CCP 2002) On considère $\mathbb{R}^3$ euclidien muni de la base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$ et D la droite d'équation $x = y/2 = z/3$. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$. Pouvait-on prévoir que la matrice était symétrique réelle ?

III Endomorphismes orthogonaux, symétriques

17. Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$, $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$. Montrez que F et G sont supplémentaires.

18. (CCP 2002) Soient u et v deux vecteurs libres de $\mathbb{R}^n$. On note φ l'application $\varphi : x \longmapsto \langle v\,, x\rangle\, u + \langle u\,, x\rangle\, v$

    a) Quels sont le noyau, le rang et l'image de φ ?

    b) φ est-elle diagonalisable ?

19. (CCP 2001) soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ euclidien muni du produit scalaire $(\cdot\,, \cdot)$. Soit M la matrice de coefficient général $m_{ij} = (x_i\,, x_j)$ (la matrice de Gram de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$).

    a) Montrer que M est symétrique et inversible.

    b) Montrer que les valeurs propres de M sont strictement positives.

    c) Montrer réciproquement que toute matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont strictement positives peut être écrite sous la même forme que M.

20. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[X]$. On pose $(A \mid B) = \displaystyle\int_{-1}^{1} A(t)B(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrez que l'application $f : P \in \mathrm{E} \longmapsto f(P)$ où

$$f(P)(X) = (1 - X^2)P'' - 2XP'$$

est un endomorphisme auto-adjoint de E.

b) Déterminez le spectre f. que peut-on en déduire ?

21. (CCP 2000) Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n et antisymétrique.
    a) Montrez que $I + A$ et $I - A$ sont inversibles.
    b) Montrez que $(I - A) \cdot (I + A)^{-1}$ est orthogonale.
    c) Montrez que $(I - A) \cdot (I + A)^{-1}$ appartient à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
22. (CCP 2002) que dire d'une matrice symétrique réelle nilpotente ?
23. (CCP 2002) Montrer que la somme des carrés des coeffcients d'une matrice symétrique réelle est égale à la somme des carrés de ses valeurs propres. Sans aucun autre calcul, en déduire les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & & & & 1 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 1 & & & & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (n \geq 3)$$

24. (CCP 2004) Montrer que $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scaliaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que l'endomorphisme M défini par $M(P)(X) = XP'' + (1 - X)P'$ est symétrique. En déduire qu'il existe une base de polynômes propres de M. Trouver les valeurs propres de M ainsi que le produit scalaire de deux polynômes propres distincts.
25. Soit r une rotation d'axe dirigé par le vecteur k et d'angle θ. Soit $s \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$. Montrer que $s \circ r \circ s^{-1}$ est une rotation dont vous déterminerez les éléments.

26. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ Déterminez la matrice par rapport à la base orthonormée (i, j, k) de $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ de la réflexion de plan P d'équation $ax + by + cz = 0$.
27. Soit
$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$
a) Quelle transformation de $\mathbb{R}^3$ euclidien représente A ?
b) Trouvez les matrices qui commutent avec A.
28. (CCP 2001, variante du précédent) Soit a la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ avec
$$A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$
Quelle est la nature de u ? Donner les éléments remarquables de u.
29. (CCP 2001) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et a un vecteur non nul de E. Soit $f : x \in \mathrm{E} \longmapsto a \wedge (a \wedge x)$. f est-elle diagonalisable ?
30. (CCP 2000) trouver les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à la fois symétriques et orthogonales.
31. (CCP 2004) Soit la matrice A telle que
$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 & b \\ -2 & 3 & c \\ 6 & a & d \end{pmatrix}$$
Trouver (a, b, c, d) pour que $A \in \mathcal{SO}_3(R)$.
32. (Mines 2004) Soit u une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$. Trouver les rotations vectorielles v de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec u.
33. (CCP 2004) Trouver A matrice complexe orthogonale d'ordre 2 de trace nulle et telle que $A^4 = A$.