Feuille d'exercices numéro 9
Orthogonalité
Indications et corrigés

I Espaces préhilbertiens

1. Attention : ici il faut **d'abord** vérifier que l'intégrale converge. Elle est impropre en -1. Comme f et g sont continues sur le segment $[-1,1]$, elles sont bornées et donc :

$$\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}f(t)g(t) \underset{-1}{=} O\Big(\frac{1}{(1+t)^{-1/2}}\Big)$$

On intègre sur $]-1,1]$
Le cas $\langle f\,,f\rangle = 0$ induit que f est nulle sur $]-1,1]$, puis par continuité sur $[-1,1]$.

2. a) Attention : ici il faut **d'abord** vérifier que la série converge. Ce qui est le cas : les deux suites u et v sont bornées et donc :

$$\frac{u_n v_n}{2^n} = O\Big(\frac{1}{2^n}\Big)$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}$ arbitraire. Observons la suite d définie par $d_n = \delta_{n,p}$ où $\delta_{n,p}$ est le symbole de Kronecker. C'est un élément de F. On a, pour $u \in B$:

$$\langle u\,,d\rangle = \frac{u_p}{2^p}$$

Donc si $u \in \mathrm{F}^{\perp}$ alors pour tout p, $u_p = 0$, c'est à dire $u = 0$ On obtient donc $F^{\perp} = \{0\}$.
Problème : $\mathrm{F} \oplus^{\perp} \mathrm{F}^{\perp} = \mathrm{F}$ et la suite constante égale à 1 n'est pas dans F. On a donc $\mathrm{F} \oplus^{\perp} \mathrm{F}^{\perp} \neq \mathrm{E}$.

3. a) Pour résoudre $\varphi(P,P) = 0$, commencer par remarquer qu'on a alors $P(a_0) = P'(a_1) = \cdots = P^{(n)}(a_n) = 0$.
Mais $\deg P^{(n)} \leq 0$, donc $P^{(n)} = 0$, donc, $P^{(n-1)}$ est constant donc...
   b) Attention : Gram-Schmidt ne donne que l'existence ! On procède par analyse-synthèse.
Analyse.
Introduisons la suite Δ_k de sous-espaces tels que $\Delta_0 = \mathbb{R}_0[X]$ et, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, Δ_k est le supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$.
Par construction, les Δ_k sont des droites. On notera Q_k un vecteur de norme 1 engendrant Δ_k.
Si la base $\big(P_0,\dots,P_n\big)$ convient, alors par construction, pour tout k, $\mathbb{R}_k[X] = \operatorname{vect}\{P_0,\dots,P_k\}$ et $P_k \in \Delta_k$. Comme la norme de P_k est 1, on a $P_k = \pm Q_k$. Par construction Q_k est de degré k, car Q_k est dans $\mathbb{R}_k[X]$ et pas dans $\mathbb{R}_{k+1}[X]$. On a donc un seul choix pour P_k.
Synthèse.
LA famille trouvée précédemment convient...
   c) Observer la famille $\big\{(X-a)^k\big\}$.
4. a) Si A est symétrique et B est antisymétrique alors :

$$\begin{aligned}\langle A\,,B\rangle &= \operatorname{tr}(A^\mathsf{T}B) = \operatorname{tr}(AB)\\ \langle B\,,A\rangle &= \operatorname{tr}(B^\mathsf{T}A) = -\operatorname{tr}(BA) = -\operatorname{tr}(AB)\end{aligned}$$

Donc $A \perp B$. Comme A et B sont arbitraires, on a bine $\mathcal{S}_n \perp \mathcal{A}_n$.
   b) Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_n$ est $\dfrac{A+A^\mathsf{T}}{2}$. La distance de A à $\mathcal{S}_n$ est la norme de $\dfrac{A-A^\mathsf{T}}{2}$. La distance est donc $\sqrt{21}$.
5. a) À la main...

b) Gram-Schmidt...

6. Difficile. Il faut d'abord savoir diagonaliser une matrice symétrique.

   Bilinéaire : la linéarité du déterminant par rapport à une ligne/colonne.

   Symétrique : le déterminant de la transposée...

   Positif, defini positif : plus délicat. Commencer par diagonaliser A et écrire $A = PDP^{\mathsf{T}}$.

7. a) Par définition $v_k = \sum_{i=1}^{n} h_{i,k} e_k$. Donc $\langle v_k \,, v_\ell \rangle = \sum_{i=1}^{n} h_{i,k} h_{i,\ell} = [H^{\mathsf{T}} H]_{k,\ell}$.

   b) $HX = 0 \Rightarrow MX = 0$. Si $MX = 0$ alors $X^{\mathsf{T}} MX = 0$ et donc $(HX)^{\mathsf{T}}(HX) = 0$ et donc $\|HX\|^2 = 0$ ce qui permet de conclure $HX = 0$.

   H est canoniquement associée à une application linéaire de $\mathcal{L}(R^p, R^n)$. La formule du rang dit donc que $\mathrm{rg}(H) + \dim \mathrm{Ker}\, H = p$.

   De même M est canoniquement associée à une application linéaire de $\mathcal{L}(R^p)$. On a aussi $\mathrm{rg}(M) + \dim \mathrm{Ker}\, M = p$.

   L'égalité des noyaux permet alors de conclure.

   c) Par définition $\mathrm{rg}(V) = \mathrm{rg}(H)$...

8. $\mathrm{Ker}(A^{\mathsf{T}} A) = \mathrm{Ker}(A)$ est fait au 7.b. qui donne aussi $\mathrm{rg}(A^{\mathsf{T}} A) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^{\mathsf{T}})$. Pb : erreur énoncé ? Je pense que c'est $\mathrm{Im}(A^{\mathsf{T}})$. Sinon, on a toujours $\mathrm{Im}(A^{\mathsf{T}} A) \subset \mathrm{Im}(A^{\mathsf{T}})$. L'égalité des dimensions permet alors de conclure...

9. a) Classique. $\mathrm{E} = \mathrm{vect}\,\{(1,0,2,1), (0,1,-1,-1)\}$

   b) Gram-Schmidt ! On trouve, par exemple la famille

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,2,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,0,-1) \right\}.$$

II Espaces euclidiens, projecteurs orthogonaux

10. a) $f(a,b) = \|Y - aX - bU\|^2$, où $U = (1, \ldots, 1)$.

    b) On projette Y sur vect $\{X, U\}$.

11. L'idée est de procéder comme au 10. Si on pose $u = (\alpha, \beta)$ alors $f(u) = \alpha c_1 + \beta c_2$, où c_1 et c_2 sont les colonnes de A. On va donc projeter b sur vect $\{c_1, c_2\}$.

12. Délicat.

13. a) Savoir faire : résoudre le système !

    b) Gram-Schmidt. Vu en cours.

    c) Voir la formule calculant le projeté orthogonal. Il ne reste plus beaucoup de termes...

    d) Si on note p' la projection sur $H^\perp$ et h un vecteur unitaire de $H^\perp$ alors $p'(x) = \langle x\,, h\rangle\, h$ etc.

14. a) On trouve $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$. La famille $\mathcal{B}$ est déjà orthogonale !

    b) Voir le bout de cours correspondant...

    c) On a $B = \mathrm{Diag}(1, 1, 0, 0)$ et $A = PBP^{-1}$ où $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.

15. a) Gram-Schmidt. On trouve : $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1, 0, -3, 2), \dfrac{1}{\sqrt{70}}(-4, 7, -2, -1) \right\}$.

    b) Calculs !

    c) On remarque que $u \in \mathrm{F}^\perp$! Donc $d(u, F) = \|u\| = 2$.

16. Calculs ! Un vecteur directeur de D est $w = (1, 2, 3)$. Il n'est pas unitaire. Si on note p cette projection, on a : pour tout

vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} p(u) &= \frac{\langle u\,, w\rangle}{\|w\|^2} w \\ &= \frac{x + 2y + 3z}{14} \cdot (1, 2, 3) \end{aligned}$$

La matrice est donc :

$$P = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme p est un projecteur orthogonal. Sa matrice dans toute base orthonormée est symétrique.

III Endomorphismes orthogonaux, symétriques

17. Ayant la formule du rang, il ne reste qu'à démontrer que la somme est directe. Si $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ alors $x = u(x)$ et il exite t tel que $x = u(t) - t$. On a alors :

$$\|x\|^2 = \langle x\,, u(t) - t\rangle = \langle x\,, u(t)\rangle - \langle x\,, t\rangle = \langle u(x)\,, u(t)\rangle - \langle x\,, t\rangle$$

Comme u est une isométrie, on obtient $\|x\|^2 = 0$ et donc $x = 0$.

18. a) On peut tout de suite voir que $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathrm{vect}\,\{u, v\}$.
Si $\varphi(x) = 0$ alors, comme la famille $\{u, v\}$ est libre, $\langle u\,, x\rangle = \langle v\,, x\rangle = 0$ et donc $x \in \mathrm{vect}\,\{u, v\}^\perp$. On a donc $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \{u, v\}^\perp = \mathrm{vect}\,\{u, v\}^\perp$. L'inclusion réciproque étant claire, on obtient $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{vect}\,\{u, v\}^\perp$.
La formule du rang donne alors $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$ et l'inclusion donnée au début permet de conclure $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{vect}\,\{u, v\}$.

b) On calcule : $\langle \varphi(x) \,, y \rangle = \langle v \,, x \rangle \langle u \,, y \rangle + \langle u \,, x \rangle \langle v \,, y \rangle$. On a donc φ symétrique et donc diagonalisable.

19. a) On se sert de l'exercice 7. Si on note V la matrice de $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ relativement à une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, alors $M = V^\mathsf{T} V$. On a donc $\det(M) = \det(V)^2 \neq 0$, car V est inversible. Un calcul de M^T montre que V est inversible.

b) Si U est un vecteur propre de M associé à α alors $MU = \alpha U$ donne $U^\mathsf{T} M U = \alpha \left\| U \right\|^2$ et donc (toujours l'exo. 7) $\left\| VU \right\|^2 = \alpha \left\| U \right\|^2$. Ceci permet de montrer que $\alpha \geq 0$. Comme M est inversible, $\alpha \neq 0$.

c) Voir le cours !

20. a) Un calcul donne $\langle P \,, Q \rangle = -\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - t^2) P'(t) Q'(t) \,\mathrm{d}t$.

b) On calcule $f(X^k) = -k(k+1)X^k + k(k-1)X^{k-2}$ (valable même si $k = 0$ ou $k = 1$). La matrice de f relativement à la base canonique est donc triangulaire supérieure... On en déduit : le spectre et le fait qu'il y $n+1$ valeurs propres distinctes...

21. a) Soit α une valeur propre de A associée à X. En calculant $\langle AX \,, X \rangle = \langle X \,, AX \rangle = (AX)^\mathsf{T} X$ trouver $\alpha = 0$.
Les nombres 1 et -1 n'étant pas valeur propres de A, les matrices $A - I$ et $A + I$ sont inversibles.

b) Notons W la matrice à examiner. Les matrices $I - A$ et $I + A$ commutent. L'inverse d'une transposée est la transposée de l'inverse. On a donc :

$$\begin{aligned} W^\mathsf{T} W &= \big((I - A)(I + A)^{-1} \big)^\mathsf{T} \big((I - A)(I + A)^{-1} \big) \\ &= (I - A)^{-1} (I + A)(I - A)(I + A)^{-1} \\ &= (I - A)^{-1} (I - A)(I + A)(I + A)^{-1} \\ &= I. \end{aligned}$$

c) On a déjà $\det W = \pm 1$. Mais :

$$\det W = \frac{\det(I-A)}{\det(I+A)} = \frac{\det(I-A^2)}{(\det(I+A))^2}.$$

On voit que A^2 (et donc $I - A^2$) est symétrique (réelle). Comme $\left\langle A^2X\,, X\right\rangle = -\left\|AX\right\|^2$, on voit qu'en posant $X =$ un vecteur propre de A^2, les valeurs propres de A^2 sont négatives.
Les valeurs propres de $I - A^2$ étant $1-$ celles de A^2, les vlaeurs propres de $I - A^2$ sont donc positives et donc, vu que $I - A^2$ est symétrique réelle, donc diagonalisable, $\det(I - A^2)$ est un produit de nombres positifs et est donc positif.
On a donc $\det(W) \geq 0$ et donw $\det(W) = 1$...

22. Elle est nulle : on la diagonalise et on observe l'équation $A^p = 0$...
23. Somme des carrés des coeffficients de A : $\mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}A)$. Mais $A = PDP^{\mathsf{T}}$ avec D diagonale...
A est de rang 2 donc 3 val. p. α, β (qui peuvent être égales) et 0 d'ordre $n-2$). On a donc les deux équations :

$$0 = \alpha + \beta \quad \text{(trace de } A\text{)}$$
$$4(n-2) = \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{(somme des carrés)}$$

On trouve donc $\alpha = -\beta = \pm 2\sqrt{n-2}$.
24. **Ne pas oublier** de vérifier que $\langle \pi\,, Q\rangle$ a bien un sens.
On voit que $M(P)(t)e^{-} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(tP'(t)e^{-t}\big)$ et on obtient :

$$\langle M(P)\,, Q\rangle = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q't)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On remarque que $M(X^k) = -kX^k + k^2X^{k-1}$ (valable aussi pour $k = 0$). La matrice de M dans la base canonique est

donc triangulaire supérieure. On voit aussi que $\mathrm{Sp}(M) = \{-0, -1, \dots, -n\}$.
Pour le produit scalaire : c'est une question de cours !

25. Comme $s \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ et $r \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$, $t = s \circ r \circ s^{-1}$ est dans $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$. t est donc bien une rotation. L'angle est inchangé : la trace n'a pas changé. L'axe est invariant par t. Un calcul montre que $k' = s(k)$ convient pour orienter cet axe.
26. Si on note σ la réflexion cherchée, alors $\sigma(x, y, z) = (x, y, z) - 2 \cdot (ax + by + cz) \cdot (a, b, c)$.
27. a) On a A orthogonale (vérifier) et $\det(A) = -1$. On a donc la composée d'une réflexion et d'une rotation.

    b) Se placer dans une base adaptée à A et voir...
28. Ici u est une rotation...
29. On a $f(x) = \langle a\,, x \rangle\, a - \langle a\,, a \rangle\, x$ On vérifie que f est symétrique et donc diagonalisable.
30. Symétrique et orthogonale : symétrie orthogonale. Que dire de plus ?
31. A est orthogonale directe si et seulement si $C_1 \wedge C_2 = C_3$...
32. Se placer dans une base adaptée à u. Forcément l'axe de v est l'axe de u...
33. A est inversible et donc on peut simplifier en $A^3 = I$. Les valeurs propres complexes de A doivent donc être solution de $x^3 = 1$ et donc être élément de $\left\{1, e^{\pm 2i\pi/3}\right\}$.

    PB : la trace ne peut jamais être nulle !