Feuille d'exercices numéro 0 complexes, trigonométrie

1. Vrai ou faux ?
   a) Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ alors $\Re e(z) = a$ et $\Im m(z) = b$.
   b) Si a et b sont complexes alors
   $$a + ib = 0 \Rightarrow a = b = 0.$$
   c) Même question que ci-dessus, mais
      i) avec a et b réels.
      ii) avec j à la place de i.
   d) Si $z \in \mathbb{R}$ alors $|z| = z$ ou $|z| = -z$.
   e) $e^{i\theta} = 1 \iff \theta = 0$.
   f) tout nombre complexe non nul a n racines n^{es} distinctes.
2. Déterminer le module et l'argument de
   a) $1 + e^{i\varphi}$.
   b) $1 - e^{i\varphi}$
   c) $\dfrac{1 - e^{i\varphi}}{1 + e^{i\varphi}}$.
3. Linéariser
   a) $\sin^6 x$.
   b) $\sin^2 x \cos^4 x$.
4. Résoudre les équations suivantes
   a) $\cos(2x) + \cos(x) + 1 = 0$
   b) $\sin(3x) = \cos(2x)$
   c) $\sin(5x) + \sin(3x) + \sin(x) = 0$
   d) $\sin(5x) + \sin(3x) - \sin(x) = 0$

e) $\sin^2(x) + 3\cos(x) + \frac{3}{4} = 0$

5. Montrer que
$$\frac{\sin(4a)+\sin(2a)}{\cos(4a)+\cos(2a)} = \tan(3a).$$
6. Transformer $1+\cos(2x)+\cos(4x)+\cos(6x)$ en produit.
7. sachant que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, montrer que
$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma) = 4\cos(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\beta}{2})\cos(\frac{\gamma}{2}).$$
8. Calculer
$$\frac{\sin 6x}{\sin x}$$
en fonction de $\cos x$.
9. a) Exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\sin(x)$.
   b) En déduire la valeur de $\sin(\frac{\pi}{5})$.
   c) Montrer qu'il existe deux rationnels a et b tels que $\cos(\frac{\pi}{5}) = a + b\sqrt{5}$ et les déterminer.
10. Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les sommes suivantes
    a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.
    b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$.
11. Résoudre dans $\mathbb{C}$ $(1+z)^n = (1-z)^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
    a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$(1+z)^n = e^{2in\alpha}.$$

b) En déduire une expression simple de

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right).$$

13. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant

$$z + \bar{z} = |z|$$

Interpréter cet ensemble géométriquement.

14. Trouver les complexes z ainsi que les entiers naturels n et p pour lesquels :

$$(1+z)^n = z^p$$

On commencera par déterminer les complexes z tels que

$$|1+z| = |z|...$$

15. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ défini par $\sin\theta = 0{,}96$ et $\cos\theta = 0{,}28$. On pose $z_1 = e^{i\theta}$ et pour tout entier naturel p, $z_p = z_1^p$. On note $d_{p,q} = |z_p - z_q|$.
   a) Exprimer $d_{p,q}$ en fonction de θ, puis, sans radicaux, en fonction de $\theta/2$.
   b) Calculer $\cos(\theta/2)$ et $\sin(\theta/2)$ et en déduire que pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, $d_{p,q} \in \mathbb{Q}$.

16. Montrer que

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right).$$

17. Formules à la Machin [1]

1. John Machin (1680-1751) est un mathématicien anglais connu principalement pour avoir calculé, en 1706, 100 décimales du nombre π grâce à la formule qui porte son nom

a) Calculer $\dfrac{(2+i)^2}{7+i}$.

b) En déduire la formule de Hermann :

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right).$$

c) De même montrer que :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{(Euler)}\\
&= 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) \quad \text{(Hutton)}\\
&= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \quad \text{(von Strassnitzky)}\\
&= 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \quad \text{(Machin)}
\end{aligned}$$