Feuille d'exercices numéro 1 Intégration

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\arctan(x)}{x\ln(2+x^2)}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$.
2. Montrez que la fonction $t \longmapsto -\dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}\cdot(1-t)^{3/2}}$ est intégrable sur $]0,1[$.
3. (CCP 2005, variante de 2) La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ est-elle intégrable sur $]0,1[$? Si oui, calculer

   $$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x.$$

   On pourra commencer par calculer la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$, puis faire le changement de variables $t=\sqrt{x}$...
4. Montrez que pour tout entier naturel n la fonction

   $$f_n : t \longmapsto t^n \ln^2(t)$$

   est intégrable sur $]0,1]$ et calculez son intégrale u_n en fonction de n. En déduire une expression de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ sous forme d'une somme de série.
5. Étudiez l'intégrabilité sur $[3,+\infty[$ des fonctions $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)\ln(\ln(t))}$.

6. Trouvez un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n+t}\,\mathrm{d}t$
7. (CCP 2001) On définit la valeur moyenne d'une fonction par
$$V_m(f) = \lim_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   a) Calculer $V_m(\mathrm{th})$.
   b) Si f est intégrable sur $[0, +\infty[$, que vaut $V_m(f)$
   c) On suppose $\lim_{t \longrightarrow +\infty} f(t) = a$. Que vaut alors $V_m(f)$?
8. (CCP 2001) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2 + \cos(t)}\,\mathrm{d}t$.
9. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x$ et la calculer.
10. (CCP 2002) Soit $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.
   a) Justifier l'existence de I.
   b) Calculer I par un changement de variable acceptable.
   c) Calculer I par une intégration par parties. Quelle remarque peut-on faire ?
11. (CCP 2002) Domaine de définition de
$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)}\,\mathrm{d}t.$$
   Montrer que $\lim_{x \longrightarrow 0^+} xf(x) = 0$ (on pourra utiliser $e^{\sqrt{t}} - 1 \geq \sqrt{t}$ et $\lim_{x \longrightarrow +\infty} xf(x) = 0$. La fonction f est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?
12. (Mines 2003) Donner le domaine de définition de
$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}\,\mathrm{d}t$$

et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

13. (ENSTIM 2009, variation du précédent)
    a) Existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
    b) Existence et calcul explicite de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.
14. (CCP 2003) Existence pour $n \in \mathbb{N}$ de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n}\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.
15. Nature et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{a(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ où $a(x)$ est la partie fractionnaire du réel x (i.e. $a(x) = x - E(x)$).
16. On considère la fonction définie par une intégrale :
$$f : x \longmapsto \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t^x}.$$
    a) Donner le domaine de définition de f. Montrer que f est monotone.
    b) Établir une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.
17. Soit f une fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ et admettant une limite ℓ quand $x \longrightarrow +\infty$.
    a) Montrer que pour tout réel a, l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} (f(t+a) - f(t))\,\mathrm{d}t$$
    converge. Exprimer cette intégrale en fonction d'une intégrale définie et de ℓ.
    b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x))\,\mathrm{d}t$

18. Montrer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument où P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
19. (Variante du précédent) Soit ω une fonction continue par morceaux et intégrable sur $I =]a, b[$ $(a < b)$. Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, la fonction $P \times \omega$ est intégrable sur I.
20. Étudier la nature et calculer le cas échéant les intégrales suivantes :
    a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$.
    b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$.
    c) $\displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
    d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4}$.
    e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3\ln(t)}{(1+t^4)^3}\,\mathrm{d}t$.
21. Étudier les fonction suivantes définies par des intégrales.
    a) $F : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.
    b) $F : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.
    c) $F : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.
    d) $F : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)}$.
    e) $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$.