# Feuille d'exercices numéro 1
# Indications et corrigé partiels

1. La fonction est positive, donc « intégrable = l'intégrale $\int_0^1$ converge ». Deux problèmes :
   - Faux problème en 0 ;
   - Équivalent en $+\infty$ : $\dfrac{\pi}{4x\ln(x)}$. Non intégrable sur $[1, +\infty[$...
2. La fonction (notée $f$) est positive, donc « intégrable = l'intégrale $\int_0^1$ converge ». Deux problèmes :
   - En 0 : $f(x) \sim -\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$. $x^{3/4}f(x) \longrightarrow 0$ permet de conclure sur $]0, 1/2]$.
   - En 1 : $f(x) \sim \dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}$. Les exemples de Riemann permettent de conclure.
3. On a :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$$
   Puis on intègre par parties en dérivant le logarithme, on effectue le changement de variables et on conclut en obtenant :
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = -2\pi.$$
4. a) La fonction $f_n$ est positive. Un seul problème : en $0^+$. Pour $n \geq 1$, ce problème est un faux problème. Pour $n = 0$, on a : $-\sqrt{t}\ln(t^2) \longrightarrow 0$...

b) On intègre par parties (attention au problème) :

$$\int_{\varepsilon}^{1} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln^2(t)\right]_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1} \frac{t^{n+1}}{n+1}\cdot 2\frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$= ...$$
$$= -\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1}\ln^2(\varepsilon) + 2\frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2}\ln(\varepsilon) + 2\frac{1-\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^3}$$

D'où $u_n = \dfrac{2}{(n+1)^3}$.

c) On vérifie que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge bien...

d) On a ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \neq -1$ :

$$\sum_{k=0}^{n}(-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t + (-1)^n \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln^2(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t}_{R_n}$$

On a clairement $0 \leq R_n \leq u_{n+1}$ et donc $R_n \longrightarrow 0$. Ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\longrightarrow+\infty} 2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)^3} = -2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n^3 ...$$

5. Savoir Faire ! On a :
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \ln(\ln(t)) + K$$
$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)\ln(\ln(t))} = \ln(\ln(\ln(t))) + K$$

   Les deux fonctions de sont donc pas intégrables.

7. a) on a $\displaystyle\int \mathrm{th}(x)\,\mathrm{d}x = \ln(\mathrm{ch}(x)) + K$. Donc $V_m(\mathrm{th}) = 1$.

   b) Si $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $V_m(f) = 0$.

   c) Dans ce cas $V_m(f) = a$ : utiliser la définition de limite...

8. Le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$. La nature de l'intégrale est alors la même que celle de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ (pourquoi ?).

9. On intègre par parties sur $[a,b]$ et on finit par obtenir : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$.

10. a) $\arcsin(u) \underset{0}{=} u + \dfrac{u^3}{6} + o(u^3)$.

    b) Le changement de variables est $u = 1/x$...

    c) On intègre par parties quoi qu'il arrive !

11. a) La fonction $g : t \longmapsto \dfrac{1}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ et ne change de signe qu'en 0.

    Comme $g(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{te^{\sqrt{t}}}$, on a $t^2 g(t) \longrightarrow 0$ et donc, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On a donc immédiatement $\mathbb{R}_+^* \subset \mathcal{D}_f$.

Au voisinage de $0^+$ : $g(x) \underset{0}{\sim} t^{-3/2}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge : $0 \notin \mathcal{D}_f$.
Pour $x < 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ contient le problème $0^+$ vu ci-dessus ; cette intégrale est donc divergente.
Finalement $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

b) On a, pour $x \in ]0,1]$ :

$$\begin{aligned}
0 \leq xf(x) &= x\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t + x\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\\
&\leq x\int_x^1 t^{-3/2}\,\mathrm{d}t + xf(1)\\
&\leq x\Big(\frac{2}{\sqrt{x}} - 2\Big) + xf(1)...
\end{aligned}$$

c) En utilisant un principe similaire, on a :

$$x^{3/4}f(x) \xrightarrow[x \longrightarrow 0]{} 0$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Pour le problème en $+\infty$ c'est un peu plus délicat. On commence par montrer qu'il existe $M > 0$ tel que si $t \geq M$, $e^{\sqrt{t}} - 1 \geq t^2$. Ensuite, on voit que si $x \geq M$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_x^{+\infty} t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x^2}$$

Et donc $\displaystyle\int_M^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge...

12. a) La fonction définie par $f_x(t) = \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} = \dfrac{e^{-xt}}{t}(e^{(x-1)t} - 1)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est de signe constant égal à celui de $x - 1$.

On a deux problèmes :

- En $0^+$ : faux problème...
- En $+\infty$, on a deux cas selon que $x > 0$ (l'intégrale converge) ou $x \leq 0$ (l'intégrale diverge)

On a donc $\mathcal{D}_I = \mathbb{R}_+^*$.
Remarque : en utilisant une idée de l'exercice suivant, on peut découper :

$$I(x) = \int_0^1 f_x(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$$

et remarquer que la deuxième intégrale est un cas particulier de la troisième...

b) Observons :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{xa}^{xb} \frac{e^{-t}-e^{-s}}{s}\,\mathrm{d}s \qquad (s = xt)\\ &= \int_a^{xa} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^b \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{xb} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Quand $b \longrightarrow +\infty$, les deux intégrales $\displaystyle\int_1^b \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{xb} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ tendent vers la mêm valeur : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$
Par contre :

$$\begin{aligned}\int_a^{xa} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_a^{xa} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_a^{xa} \frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \ln(x) + \int_a^{ax} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Comme la fonction $\varphi$ est définie, continue sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle peut être prolongée par continuité en 0 en posant $\varphi(0) =$

$-1$, on a :

$$\int_a^{ax} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[a \longrightarrow 0]{} 0.$$

En rassemblant les morceaux, on a donc :

$$I(x) = \ln(x)$$

Remarque : Le cours sur les intégrales dépendant d'un paramètre permettra d'arriver au même résultat bien plus vite !

19. La fonction $P$ est bornée sur le segment $[a,b]$. Soit alors $M$ tel que sur $[a,b]$, $|P| \leq M$. On a alors, sur l'intervalle ouvert $|P \times \omega| \leq M \times |\omega|$.
Comme $\omega$ est intégrable sur $]a,b[$ , $|\omega|$ l'est aussi etc.

20. a) Converge. $I_a = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. il faut décomposer[1] :

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

b) Converge (deux faux problèmes). Valeur ?

c) Attention au signe (il change en 1) ! En fait $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dots$ : converge. Utiliser la règle de riemann avec $\sqrt{x}$ en $0^+$ et $x^{3/2}$ en $+\infty$.
Faire le changement de variables $y = 1/x$ pour avoir $I_c = 0$.

d) Converge (Riemann !) Pour le calcul utiliser

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + x - 4x^2 = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

[1] Identité remarquable À CONNAÎTRE : $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$.

On a alors :

$$\frac{1}{x^4+4} = \frac{ax+b}{x^2+2x+2} + \frac{cx+d}{x^2-2x+2}$$

Les constantes se déterminent en utilisant la parité (donne $a = -c$ et $b = d$), puis en prenant deux valeurs (simples par ex 0 et 1)
On trouve finalement $I_d = \dfrac{\pi}{8}$.

e) On commence par faire le changement de variables $u = t^4$, puis à l'aide de Riemann on détermine la convergence et, enfin on calcule à l'aide d'une intégration par parties pour trouver : $I_e = -\dfrac{1}{32}$

21. Les fonctions sont de la forme $F(x) = \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour trouver le domaine de définition, il faut chercher quand est ce que le segment de bornes $a(x)$ et $b(x)$ est inclus dans un intervalle où $f$ est définie et continue par morceaux ou alors quand est ce que $f$ est intégrable sur $]a(x), b(x)[$...

a) $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}_+$. $F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \dfrac{2e^{x^2} - e^x}{x} > 0$

b) $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. $F'(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)}$. En utilisant :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \int_x^{x^2} \underbrace{\left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right)}_{\varphi(t)} \mathrm{d}t$$

et en remarquant qu'en posant $\varphi(1) = \dfrac{1}{2}$ on obtient une fonction continue sur $]0, +\infty[$, on voit que $f$ a une limite en 1 qui vaut $\ln(2)$...

c) $\mathcal{D}_F = R^*$. $F'(x) = 3f(3x) - f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^x}{x} > 0$.

d) $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}^*$. $F'(x) = \dfrac{2}{\ln(1+4x^2)} - \dfrac{1}{\ln(1+x^2)}$ : extrema en $x = \pm\sqrt{2}$. En utilisant la même méthode qu'à la question précédente ($f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \psi(x)...$), on voit que $F$ a pour limite $+\infty$ en $0^+$ (en fait on a un développement « limité »). Un encadrement brutal de l'intégrale donne aussi un équivalent en $+\infty$ : $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{2\ln(x)}$...

e) $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}$ et $F$ est $\mathcal{C}^1$. La fonction $F$ vérifie :

$$F(x+\pi) = F(\pi - x) = F(x)$$

Donc on peut se limiter à $[0, \pi/2]$. On a alors :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -2\sin(x)\cos(x)\arccos(|\cos(x)|) \\ &\qquad + 2\sin(x)\cos(x)\arcsin(|\sin(x)|). \\ &= 0 \end{aligned}$$

car quand $x \in [0, \pi/2]$, on a $\sin(x) \geq 0$ et $\cos(x) \geq 0$ et donc $|\cos(x)| = \cos(x)$ etc.