Feuille d'exercices numéro 15
Fonctions de plusieurs variables

1. Étudiez au voisinage de $(0,0)$, $f(x,y) = \dfrac{y(x^2+xy^2+y^4)}{x^2+y^4}$.
2. (Centrale 2001) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t^2,t^3) = 0.$$
Montrez que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$
Indication : différenciez f au voisinage de $(0,0)$.
3. Trouver $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ telle que $g : (\mathbb{R}_+^*)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y,z) = f\left(\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right)$ vérifie $\Delta g = 0$.
4. Soit $\mathrm{E} = (\mathbb{R}_+^*)^2$.
   a) Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit sur E la fonction f par $f(x,y) = g(\ln(x),\ln(y))$.
      i) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur E.
      ii) Calculer $T(f) = x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 4y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial f}{\partial x} - 4y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles de g.
   b) Soit k défini sur $\mathbb{R}^2$ par $k(u,v) = (X,Y)$ où $(X,Y) = (au+bv, cu+dv)$ avec $ad-bc \neq 0$.
      i) Prouver que k est un automorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$.

ii) En posant $g = h \circ k$, calculer les dérivées partielles de g à l'aide de celles de h.

c) Déterminer (a, b, c, d) pour que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 4\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial X \partial Y}$. (On ne vous demande pas de trouver toutes les solutions, une suffit).

d) Déterminer les fonctions f de E telles que $T(f) = 0$.

5. (CCP 2001) Trouver f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(x, y) \cdot \big(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\big) + x^2 + y^2 = 0.$$

Indication : on pourra utiliser les coordonnées polaires.

6. (Mines 2001) trouver le maximum et le minimum de $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ sur $\Delta = \big\{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x + y + z = 1\big\}$.

7. (CCP 2003,2005) Soit $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\big\}$ et $B = \big\{(t, z) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\big\}$. Soit φ définie sur B à valeurs dans A par $\varphi(t, z) = (t + tz, t - tz)$.

a) Montrer que φ est une bijection de B sur A.

b) Montrer que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

c) Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$, de A dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{2x}{x+y}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{2y}{x+y}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{2f(x, y)}{x + y + 2} = (x+y+2)\cos\big(\frac{x+y}{2}\big).$$

8. (CCP 2005) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on pose $\varphi(x, y) = (u, v) = (x, \dfrac{y}{x})$.

a) Montrer que φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $M \subset \mathbb{R}^2$ et donner M. Montrer que φ^{-1} est aussi $\mathcal{C}^2$.

b) On pose $f = g \circ \varphi$, avec f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'on définit ainsi une unique fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ sur M. Calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}$.

c) Résoudre :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \qquad (E)$$

9. (École de l'Air 2004) Étudier la continuité de $f(x,y)=(x^2+xy)\sin(1/x)$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Étudier la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.
10. Résoudre : $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Vous pourrez poser $u=xy$, $v=x/y$.
11. La relation $x+y+z=\sin(xyz)$ définit z comme fonction (implicite) de classe $\mathcal{C}^1$ de (x,y) en $(0,0,0)$. Déterminez en $(0,0)$ $\partial z/\partial x$ et $\partial z/\partial y$.
12. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Prolongement par continuité et étude des dérivées partielles de $g(x,y)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t$.
13. Soit $y=\varphi(x)$ défini implicitement par $xy^4+y-x^3=0$. On admet qu'au voisinage de 0, la fonction φ est bornée. Trouvez le développement limité à l'ordre 20 de φ en 0.