Feuille d'exercices numéro 15
Fonctions de plusieurs variables
Indications et corrigés partiels

1. On remarque d'abord que $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$ si et seulement si $\rho = \sqrt{x^2 + y^4} \longrightarrow 0$. On a aussi les ingégalités :

$$|x| \leq \rho$$
$$|y| \leq \sqrt{\rho}$$

On en déduit la majoration :

$$|f(x, y)| \leq \frac{\sqrt{\rho}(\rho^2 + \rho^2 + \rho^2)}{\rho^2} = 3\sqrt{\rho}.$$

Donc $f(x, y)$ à pour limite 0 en $(0, 0)$.

2. Dérivons deux fois la fonction $\varphi : t \longmapsto f(t^2, t^3)$ (elle est $\mathcal{C}^2$ car...)

$$\varphi'(t) = 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3)$$
$$\varphi''(x) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 4t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2, t^3) + 6t\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) + 9t^4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t^2, t^3)$$

Comme φ est identiquement nulle, on a après simplification, pour tout $t \neq 0$:

$$0 = 2\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 3t\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3)$$
$$0 = 4t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t^2, t^3) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3) + 9t^3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t^2, t^3)$$

La formule demandée s'obtient en utilisant la continuité des différentes dérivées partielles de f en $(0, 0)$.

3. Pour nous simplifier la vie, notons $U = \dfrac{x^2+y^2}{z^2}$. On calcule et on obtient

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{4x^2}{z^4} f''(U) + \frac{2}{z^2} f'(U)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{4y^2}{z^4} f''(U) + \frac{2}{z^2} f'(U)$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{4(x^2+y^2)^2}{z^6} f''(U) + \frac{6(x^2+y^2)}{z^4} f'(U)$$

D'où :

$$\Delta g(x,y,z) = \frac{4U+4U^2}{z^2} f''(U) + \frac{4+6U}{z^2} f'(U)$$

La fonction f est donc solution de $2U(1+U)f''+(2+3U)f' = 0$. On résout et on obtient f sous la forme :

$$f(U) = \alpha + \beta \operatorname{argth}(U)$$

4. En lisant bien l'énoncé, on voit que les variables de g sont nommées u et v.

a) i) f est $\mathcal{C}^2$ par compostion.

ii) On a, en notant $M = (\ln(x), \ln(y))$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial u}(M)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{y}\frac{\partial g}{\partial u}(M)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u}(M) + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(M)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{1}{xy}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(M)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -\frac{1}{y^2}\frac{\partial g}{\partial v}(M) + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(M)
\end{aligned}$$

Donc :

$$T(f) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(M) - 4\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(M)$$

b)i) k est un automorphisme : son déterminant est non nul. Comme k est linéaire, k (ainsi que k^{-1}) est $\mathcal{C}^\infty$.

c) Les variables de h sont notées X et Y. On a, en omettant les variables :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u} &= a\frac{\partial h}{\partial X} + c\frac{\partial h}{\partial Y}\\
\frac{\partial g}{\partial v} &= b\frac{\partial h}{\partial X} + d\frac{\partial h}{\partial Y}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= a^2\frac{\partial^2 h}{\partial X^2} + 2ac\frac{\partial^2 h}{\partial X \partial Y} + c^2\frac{\partial^2 h}{\partial Y^2}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} &= b^2\frac{\partial^2 h}{\partial X^2} + 2bd\frac{\partial^2 h}{\partial X \partial Y} + d^2\frac{\partial^2 h}{\partial Y^2}
\end{aligned}$$

On peut alors choisir $(a, b, c, d) = (1/2, 1/4, 1/2, -1/4)$ on a bien la formule demandée

d) On trouve successivement :

$$\begin{aligned} h(X,Y) &= \varphi(X) + \psi(Y) \\ g(u,v) &= \varphi(u/2v/4) + \psi(u/2 - v/4) \\ f(x,y) &= \varphi(\ln(x)/2 + \ln(y)/4) + \psi(\ln(x)/2 - \ln(y)/4) \end{aligned}$$

Où φ et ψ sont deux fonction arbitraires $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

5. On nous demande de faire le changement de variables $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. C'est à dire introduire g telle que $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Un calcul donne :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = r\frac{\partial g}{\partial r}$$

La fonction g vérifie donc :

$$rg(r,\theta)\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + r^2 = 0$$

Donc g s'écrit donc sous la forme :

$$g(r,\theta) = \sqrt{\varphi(\theta) - r^2}$$

Avec φ une fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique.

6. On cherche donc les extrema de g définie par $g(x,y,z) = f(x,y,1-x-y)$ sur U défini par : $(x,y) \in U$ ssi $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1 - x$.

a) Recherche des points critiques. Un calcul donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= 1 - 2x - y \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= 1 - x - 2y \end{aligned}$$

Un seul point critique pour g dans l'intérieur de U. Un calcul donne :

$$g(\frac{1}{3}+h, \frac{1}{3}+k) = \frac{1}{3} - hk - h^2 - k^2 = \frac{1}{3} - (h - \frac{k}{2})^2 - \frac{3}{4}k^2$$

Le point $(1/3, 1/3)$ donne donc un maximum (global) pour g. donc $(1/3, 1/3, 1/3)$ donne lui aussi un maximum (global) pour f.

b) Étude aux bord. On étudie donc g sur les arcs $t \in [0,1] \longmapsto (t, 0)$, $t \in [0,1] \longmapsto (0, t)$ et $t \in [0,1] \longmapsto (t, 1-t)$

i) Extrema de $t \longmapsto g(t, 0)$. On a $g(t, 0) = t - t^2 = 1/4 - (t - 1/2)^2$. Maximum pour $t = 1/2$, valeur $1/4$. Minima pour $t = 0$ et $t = 1$, valeur 0.

ii) Extrema de $t \longmapsto g(0, t)$. Même résultats que ci-dessus

iii) Extrema de $t \longmapsto g(t, 1-t)$. On a $g(t, 1-t) = t(1-t)$. Mêmes résultats.

c) Conclusion pour f :

— Maximum : atteint en $(1/3, 1/3, 1/3)$ de valeur $1/3$.

— Minimum : atteint en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ de valeur 0.

7. a) Pour $(x, y) \in A$, on résout l'équation $(x, y) = \varphi(t, z)$ Celle-ci a une unique solution dans B : $(t, z) = (\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{x+y})$.

b) Les fonctions φ et φ^{-1} sont clairement $\mathcal{C}^1$: ce sont des fonctions polynomiales ou rationnelles dont les dénominateurs ne s'annulent pas.

c) L'énoncé invite à considérer la fonction g définie par $g = f \circ \varphi$. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{2y}{(x+y)^2}\frac{\partial g}{\partial z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{2x}{(x+y)^2}\frac{\partial g}{\partial z}$$

L'équation se transforme alors en :

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{g}{t+1} = 2(t+1)cos(t)$$

Qui admet des solutions de la forme :

$$g(t,z) = \frac{\alpha(z)}{t+1} + \frac{(2t^2+4t-2)\sin(t) + (4t+4)\cos(t)}{t+1}$$

8. La fonction φ est clairement $\mathcal{C}^2$ sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. De plus $(u,v) = \varphi(x,y)$ ssi $(x,y) = (u,uv)$, donc φ est une bijection de U dans lui même (c-à-d $M = U$) et, comme $\varphi^{-1}(u,v) = (u,uv)$, φ^{-1} est $\mathcal{C}^2$ sur M.

   a) On a clairement $g = f \circ \varphi^{-1}$ et, comme φ est $\mathcal{C}^\infty$, g est de classe $\mathcal{C}^2$. On a :

$$\begin{aligned} g(u,v) &= f(u,uv) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u,uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,uv) + 2v\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u,uv) + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,uv) \end{aligned}$$

   b) On est donc amené à résoudre l'équation $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$. Cette équation a pour solutions les fonctions de la forme $g(u,v) = a(v) + ub(v)$ sur M, où a et b sont deux fonctions arbitraires et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Les solutions de (E) sont donc de la forme :

$$f(x,y) = a\left(\frac{y}{x}\right) + xb\left(\frac{y}{x}\right)$$

9. On a $f(x,y) = (x+y)x\sin(1/x)$. On a clairement f $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (Oy)$. $f(x,y)$ qui tend vers 0 en $(0,a)$. En posant $f(0,a) = 0$, on prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $x \neq 0$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x+y)\sin(1/x) - \frac{x+y}{x}\sin(1/x),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\sin(1/x).$$

Maintenant, pour $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h} = (h+y)\sin(1/h)$$
$$\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h} = 0$$

On voit donc que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)$ existe et faut 0 et que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ ne peut exister que ssi $y = 0$.

10. Voir les exercices 4, 7 et 9 pour une idée de la démarche...
11. On suppose donc que dans un voisinnage de $(0,0)$, $f(x,y,z(x,y)) = 0$ où $f(x,y,y) = x+y+z-\sin(xyz)$. En dérivant, on a :

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} - \left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos(xyz) = 0$$
$$1 + \frac{\partial z}{\partial y} - \left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos(xyz) = 0$$

Donc, on a :

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -1,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -1.$$

12. Notons F une primitive de f. On a :

$$g(x,y) = \frac{F(xy) - F(x)}{x}$$

La fonction g est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe des ordonnées (la droite d'équation $x = 0$).
La formule des accroissements finis appliquée à F entre x et xy permet de dire qu'il existe un réel $\theta_{x,y} \in]0,1[$ tel que :

$$g(x,y) = (y-1)f(x + \theta_{x,y} \cdot (xy - x))$$

On voit que quand (x,y) tend vers $(0,b)$ alors $g(x,y)$ tend vers $(b-1)f(0)$.

13. Observons d'abord :

$$y = x^3 - xy^4 \tag{$\star$}$$

Ceci permet immédiatement de dire que $\varphi(0) = 0$. Comme φ est bornée au voisinage de 0, on peut écrire $y = \varphi(x) \underset{0}{=} O(1)$.
En injectant dans le membre de droite de $(\star)$, on obtient :

$$y \underset{0}{=} x^3 - xO(1)^4 \underset{0}{=} O(x)$$

puis

$$\begin{aligned} y^4 &\underset{0}{=} \big(xO(1)\big)^4 \\ &= x^4 O(1)^4 \\ &= x^4 O(1) \\ &= O(x^4) \end{aligned}$$

Donc on a $y = x^3 - xy^4 \underset{0}{=} x^3 + O(x^5)$. Donc $y \underset{0}{=} x^3 + o(x^4)$.

Donc :

$$\begin{aligned}
y &\underset{0}{=} x^3 - x\big(x^3 + o(x^4)\big)^4 \\
&\underset{0}{=} x^3 - x \cdot \big(x(1 + o(x))\big)^4 \\
&\underset{0}{=} x^3 - x \cdot x^{12} \cdot \big(1 + o(x)\big)^4 \\
&\underset{0}{=} x^3 - x^{13} \cdot \big(1 + o(x)\big) \\
&\underset{0}{=} x^3 - x^{13} + o(x^{14})
\end{aligned}$$

Refaisons tourner la machine :

$$\begin{aligned}
y &\underset{0}{=} x^3 - x\big(x^3 - x^{13} + o(x^{14})\big)^4 \\
&\underset{0}{=} x^3 - x \cdot x^{12} \cdot \big(1 - x^{10} + o(x^{11})\big)^4 \\
&\underset{0}{=} x^3 - x^{13} \cdot \big(1 - 4x^{10} + o(x^{11})\big) \\
&\underset{0}{=} x^3 - x^{13} + 4x^{23} + o(x^{24})
\end{aligned}$$

Et ce n'est que le début...