Feuille d'exercices numéro 14
Fonctions et Arcs

1. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$. On suppose qu'il existe un plus petit entier $q \geq 3$ tel que $f^{(q)}(0) \neq 0$. On note G_f le graphe de f et M le point de G_f d'abscisse x.
   a) Écrire le développement limité de f à l'ordre q en 0.
   b) Montrer l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout x de $]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\}$, la tangente en M à G_f coupe l'axe Ox en un point noté T.
   c) On note I le milieu de OM. Montrer l'existence d'un réel $\beta \in]0,\alpha[$ tel que, pour tout x de $]-\beta,\beta[\setminus\{0\}$, la droite IT coupe l'axe Oy en un point P.
   Étudier, suivant la valeur de l'entier q, la limite du point P lorsque x tend vers 0.
2. Tracer l'allure du support de l'arc paramétré $(\mathbb{R}, f)$ où f : $t \longmapsto \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, t\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$.
3. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction dérivable telle que $f(0) = \vec{0}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$. *On pourra penser à faire un développement limité à l'ordre* 1 *et utiliser la définition de limite.*
4. Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $\langle \ | \ \rangle$. Soit f une application du segment $[a,b]$ dans E, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. En considérant $\varphi : t \longmapsto \langle f(b) - f(a) \mid f(t)\rangle$, démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$\|f(b) - f(a)\| \leq |b-a| \, \|f'(c)\|$$

5. On ientifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soient n fonction dérivables C_1, $\dots$, C_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. On pose M la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M(t) = \big(C_1(t) \mid \cdots \mid C_n(t)\big)$. On suppose $M(0) = I_n$. Montrer l'équivalence entre les assertions :

$$\text{(i)} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ M(t) \in \mathcal{O}(n)$$

$$\text{(ii)} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \big(M(t)\big)^{\mathsf{T}} M'(t) \text{ est antisymétrique}$$

6. Soit M une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(0) = I_n$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t)^2 = I_n$.
   a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ est diagonalisable. Que dire de son spectre ?
   b) Si on note $m(t)$ la multiplicité de la valeur propre 1 de $M(t)$, déterminer $\operatorname{tr}(M(t))$.
   c) Montrer que pour tout réel t, $M'(t) = -M(t)M'(t)M(t)$.
   d) Montrer que l'application $t \longmapsto \operatorname{tr}(M(t))$ est constante.
   e) En déduire $M(t)$.
7. a) Soit (I, γ) un arc paramétré du plan de classe $\mathcal{C}^1$ et régulier. Donner une équation cartésienne de la tangente au support de l'arc au point de paramètre $t_0 \in I$.
   b) Ici $I = \mathbb{R}$ et $\gamma(t) = \big(\dfrac{t^2}{2p}, t\big)$. Le support de cet arc est une parabole. Déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ par lesquels passent deux tangentes à la paraboles qui soient perpendiculaires.
8. On considère l'arc paramétré par $\gamma : t \longmapsto (\cos t, \sin t)$ et on note $A = (1, 0)$. On pose $I = [0, 2\pi]$.
   a) Donner pour $t \in \mathbb{R}$, les coordonnées du point $M(t)$, projeté orthogonal de A sur la tangente à l'arc (I, γ) au point de paramètre t.
   b) Étudier l'arc (I, M).
9. On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Soit (I, γ) un arc paramétré du plan de classe $\mathcal{C}^1$ ne passant pas par $\vec{0}$.

On pose pour tout $t \in I$, $S(t) = \dfrac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$.

a) Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ et que $S'(t)$ est orthogonal à $S(t)$ pour tout $t \in I$.

b) Montrer que $\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)$ libre équivaut à $S'(t) \neq 0$.

c) En déduire tous les arcs paramétrés (I, γ) de classe $\mathcal{C}^1$, ne passant pas par 0 et tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)$ est liée.

10. On considère l'arc Γ paramétré par :

$$x(t) = \frac{t}{1+t^3},\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3}$$

a) Montrer qu'une droite du plan coupe le support en au plus trois points.

b) Réciproquement, on se donne trois points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ de l'arc. Donner une condition nécessaire et suffisante sur t_1, t_2 et t_3 pour que ces trois points soient alignés.

c) La tangente en $M(t)$ à l'arc le recoupe en $M(t')$. Exprimer t' en fonction de t.

d) Soient $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ trois points alignés de l'arc. Les tangentes en ces points à l'arc le recoupent en trois nouveaux points $M(t_1')$, $M(t_2')$ et $M(t_3')$. Montrer que ces trois nouveaux points sont alignés.

11. a) Soient $\mathrm{E}_1, \dots \mathrm{E}_p$, F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. On considère p fonctions $f_1, \dots, f_p$ dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs respectivement dans E_1, $\dots \mathrm{E}_p$, et φ une application p-linéaire de $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$ vers F.

Montrer que $\varphi : t \longmapsto \varphi(f_1(t), \dots, f_p(t))$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

b) Ici, on suppose $\mathrm{E}_1 = \cdots = \mathrm{E}_p = \mathbb{R}^p$. Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée de $t \longmapsto \det(f_1(t), \ldots, f_p(t))$.

c) On note :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \dfrac{x^2}{2} & x & 1 & \ddots & & \vdots \\ \dfrac{x^3}{6} & \dfrac{x^2}{2} & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ \dfrac{x^n}{n!} & \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!} & \cdots & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Justifier que l'application D_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer D_n'. en déduire D_n.

12. Construire la courbe définie par :

$$x(t) = \sin(t) - \cos(t) - \ln|\tan(t/2)|, \; y(t) = \sin(t) + \cos(t).$$

13. Étude au voisinage de $t = 0$ de la courbe définie par :

$$x(t) = e^t - \sin(t) - \cos(t), \; y(t) = \arctan(t) - t + t^3/3.$$

14. Soit (Γ) la courbe définie paramétriquement par :

$$x(t) = \frac{t}{t^2 - 1}, \; y(t) = \frac{t^2}{t+1}.$$

a) Étudiez les variations de x et y.

b) Étudiez les branches infinies. Vous chercherez les asymptotes éventuelles et vous déterminerez la position de la courbe par rapport à ces droites le cas échéant.

c) Déterminez le point double A de la courbe. Montrez que les tangentes en A sont orthogonales.

d) Tracez (Γ).

15. (CCP 2001) Étudier l'arc paramétré :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{2}{t+1} + \dfrac{3}{t-1} \\[2ex] y(t) = \dfrac{2}{t} + \dfrac{3}{t+1} + \dfrac{1}{t-1} \end{cases}$$

16. (Saint-Cyr 2002) Étudier et tracer la courbe d'équation :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t} \\[1ex] y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

On étudiera en particulier les points doubles.

17. Soit $(\mathcal{C})$ la cardioïde d'équation : $r(\theta) = a(1+\cos(\theta))$. Soient P et Q deux points de $(\mathcal{C})$ alignés avec O.

a) Tracez la courbe $(\mathcal{C})$.

b) Si θ est le paramètre de P, quel est le paramètre de Q ?

c) Déterminez l'angle entre l'axe Ox et la tangente en P.

d) Montrez que les tangentes en P et Q sont orthogonales.

e) Déterminez l'équation de la tangente à la courbe en P sous forme normale (i.e. une équation de la forme $x\cos(t) + y\sin(t) = p$). En déduire celle de la tangente à $(\mathcal{C})$ en Q.

f) Déterminez l'intersection des tangentes en P et Q. Montrez que ce point d'intersection décrit un cercle dont vous donnerez le centre et le rayon.

g) Tracez le cercle sur le même graphique que $(\mathcal{C})$.

18. (CCP 2001) Tracer la courbe définie par

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos(t) + \cos(4t) \\ y(t) = 4\sin(t) - \sin(4t) \end{cases}$$

Calculer sa longueur.

19. (CCP 2003) Soit $a > 0$. Montrer que les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ données par :

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$
$$\rho = a\sin(2\theta),$$

ont la même longueur.

20. (CCP 2004, 2005) L'espace affine est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

a) Montrer qu'il existe un unique arc paramétré $t \longmapsto M(t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ associé à la fonction vectorielle :

$$t \longmapsto \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

vérifiant les conditions

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{\jmath}, \tag{i}$$

$$\overrightarrow{OM}(0) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(0) = \vec{0}. \tag{ii}$$

Soit γ cet arc.

b) Représenter graphiquement γ. Donner une équation de la tangente à cet arc T. Pouvait-on prévoir ce résultat ? Calculer la longueur de l'arc de courbe pour t variant de 0 à 2π.

21. Soit Γ l'arc de paramétrage $t \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

a) Construire Γ.

b) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{D}_t$ au point de M paramètre t.

c) Déterminer l'intersection A de $\mathcal{D}_t$ avec l'axe des abscisses. Déterminer la longueur AM.