Feuille d'exercices numéro 14
Fonctions et arcs
Indications et Corrigé

1. **Indications**
   a) Beaucoup de termes sont nuls et n'apparaissent pas.
   b) Écrire l'équation de la tangente. Attention x est déjà utilisé : se servir de (X, Y) pour les coordonnées d'un point d'une droite... Dans quel cas la tangente coupe-t-elle l'axe des abscisses. Traduire l'existence de T sur la fonction f.
   c) Écrire les équations correspondant au problème. Traduire l'existence de P sur f. Faire un développement limité.
2. **Indication** Parité donc symétries. Il y a une asymptote verticale $x = -1$. On remarquera que le point de paramètre ± 1 est double : en ce point $x = y = 0$.
3. **Indication** On pourrait penser à une somme de Riemann. Mais ce n'en est pas une. Faire un développement limité à l'ordre 1 de f en 0.
4. **Indication** Que dit la formule des accroissements finis sur φ ?
5. **Indication** Que veut donc dire $M(t) \in \mathcal{O}(n)$?
6. **Indication** Polynôme annulateur. Dérivée d'un produit de matrices. Attention à l'ordre. La trace est linéaire.

1. **Solution**

   a) L'énoncé dit que les premiers termes *non nuls* du développement limité de f s'écrivent :

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(q)}(0)}{q!}x^q + o(x^q)$$

   b) La tangente passant par M a pour équation $Y = f(x) + f'(x)(X - x)$. Cette droite coupe l'axe des abscisses en un seul point si et seulement si elle n'est pas horizontale, c'est-à-dire ssi $f'(x) \neq 0$.
   Or l'énoncé dit que $f''(0) \neq 0$. de ce fait f' est *strictement monotone* dans un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ centré en 0 : f' va donc s'annuler et changer de signe en 0 et garder un signe constant sur $]-\alpha, 0[$ et $]0, \alpha[$.
   Le point T a pour coordonnées $(x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}, 0)$. C'est le point qu'on utilise dans la méthode de Newton de recherche de racine.

   c) Le point I a pour coordonnées $(x/2, f(x)/2)$. La droite (IT) a pour équation :

$$\begin{vmatrix} X - \dfrac{x}{2} & x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} - \dfrac{x}{2} \\ Y - \dfrac{f(x)}{2} & 0 - \dfrac{f(x)}{2} \end{vmatrix} = 0$$

   Qui est :

$$-\frac{f(x)}{2}X + (\frac{x}{2} - \frac{f(x)}{f'(x)})Y = \frac{1}{2}\frac{f^2(x)}{f'(x)} - \frac{xf(x)}{2}$$

   et ne coupe l'axe des ordonnées ($X = 0$) que si et seulement si le coefficient de Y est non nul. Un développement limité à l'ordre $q-2$ de ce coefficient est : $Ax^{q-2} + o(x^{q-2})$

où A est une constante non nulle. L'existence de β se démontre comme pour celle de α.
L'ordonnée de P est alors : $\dfrac{f^2(x) - xf(x)f'(x)}{2f(x) - xf'(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{f''(0)}{4f^{(q)}(0)} \cdot \dfrac{q!}{q-2} \cdot x^{4-q}$. On doit alors considérer 3 cas : $q = 3$, $q = 4$ et $q > 4$.

2.

3. On a $f(x) \underset{0}{=} f(0) + xf'(0) + o(x) = xf'(0) + x\varepsilon(x)$ où ε est une fonction qui tend vers $\vec{0}$ en 0. On a donc :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} f'(0) + o\Big(\frac{k}{n^2}\Big)\right) \\ &= \frac{n+1}{2n} f'(0) + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\varepsilon\Big(\frac{k}{n^2}\Big) \\ &= \frac{n+1}{2n} f'(0) + R_n \end{aligned}$$

reste à observer la somme restante. Soit $\alpha > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que si $|x| \leq \eta$ alors $\|\varepsilon(x)\| \leq \alpha$. Donc, si $1/n \leq \eta$,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{n} k\varepsilon\Big(\frac{k}{n^2}\Big) \right\| &\leq \sum_{k=1}^{n} k \left\| \varepsilon\Big(\frac{k}{n^2}\Big) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} k \left\| \varepsilon\Big(\frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n}\Big) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} k\alpha \\ &\leq \frac{n(n+1)}{2}\alpha \\ &\leq n^2\alpha \end{aligned}$$

Et donc $\|R_n\| \leq \alpha$.

Donc, par définition, $R_n \longrightarrow 0$ et donc $S_n \longrightarrow \dfrac{1}{2}f'(0)$.

4. La fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $|\varphi(b) - \varphi(a)| \leq (b-a)\varphi'(c)$. Or :

$$\begin{aligned} \varphi(b) - \varphi(a) &= \|f(b) - f(a)\|^2 \\ \varphi'(c) &= \langle f(b) - f(a) \mid f'(c) \rangle \\ &\leq \|f(b) - f(a)\| \, \|f'(c)\| \end{aligned}$$

5. On a $M(t) \in \mathcal{O}(n)$ ssi $M(t)^{\mathsf{T}} M(t) = I_n$. Comme $M(0) = I_n$, on a $M(t)^{\mathsf{T}} M(t) = I_n$ pour tout t ssi $M'(t)^{\mathsf{T}} M(t) + M(t)^{\mathsf{T}} M'(t) = 0$...
6. a) Pour tout t, $M(t)$ est une (matrice de) symétrie : elle est diagonalisable et on a $\operatorname{Sp}(M(t)) \subset \{-1, 1\}$.

   b) On a $\operatorname{tr}(M(t)) = m(t) \cdot 1 + (n - m(t)) \cdot (-1) = 2m(t) - n$.

   c) En dérivant, on obtient $M'(t)M(t) + M(t)M'(t) = 0$. En multipliant à droite par $M(t)$, on obtient le résultat annoncé.

   d) Posons $\varphi(t) = \operatorname{tr}(M(t))$. Comme tr est linéaire, on a φ dérivable et $\varphi'(t) = \operatorname{tr}(M'(t)) = -\operatorname{tr}(M(t)M'(t)M(t)) = -\operatorname{tr}(M'(t))$...

   e) La trace de $M(t)$ est donc constante et vaut donc n. Donc $m(t) = n$ pour tout t. $M(t)$ est diagonalisable et a pour seule valeur propre 1 : c'est donc I_n.
7. a) Cours ! One équation est donnée par la formule :

$$\begin{vmatrix} X - x(t_0) & x'(t_0) \\ Y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

   Où on a supposé que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

b) L'équation de la tangente au point de paramètre t est donc :

$$(X - \frac{t^2}{2p}) - (Y - t) \cdot \frac{t}{p} = 0$$

Un vecteur directeur de celle-ci est : $(\frac{t}{p}, 1)$. Les tangentes passant par les points de paramètres s et t sont perpendiculaires si et seulement sileurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, c'est-à-dire, $\frac{ts}{p^2} + 1 = 0$ ou encore $s = -\frac{p^2}{t}$. Les points cherchés ont donc des coordonnées (X, Y) qui vérifient :

$$\begin{cases} pX - tY = -\dfrac{t^2}{2} \\ pX + \dfrac{p^2}{t}Y = -\dfrac{p^4}{2t^2} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$X = -\frac{p}{2}$$
$$Y = \frac{t}{2} - \frac{p^2}{2t}$$

Les points cherchés sont donc sur la droite d'équation $X = -1/2$. reste à savoir si tous les points de cette droite conviennent, donc si l'équation $Y = fract2 - \frac{p^2}{2t}$, d'inconnue t a toujours une solution. Comme il s'agit d'une équation du 2e degré, on sait faire...

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20.

21.