Feuille d'exercices numéro 13 Équations différentielles

I Premier ordre

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   a) $(1+x^2)\cdot\arctan(x)\cdot y'-y=x^2-2x\cdot(1+x^2)\cdot\arctan(x)$.
   b) (CCP 2004) Résoudre $x^2\cos(x)y'-x^2\sin(x)y+1=0$.
2. (CCP 2004) soit (E) : $xy'(x)+2y(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.
   a) Donner les solutions de (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0.
   b) Montrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qu'on notera f.
   c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. (CCP 2004) Résoudre l'équation différentielle
$$y'-\frac{x}{x^2-1}y=2x.$$
4. (Centrale 2003) Résoudre l'équation différentielle :
$$(1-t^2)g'(t)-tg(t)=2t\sqrt{1-t^2}.$$
5. Soit $a:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable.
   Établir que les solutions de l'équation différentielle $y'-a(t)y=0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.
6. Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ et $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction continue et périodique de période $T>0$.
   On étudie l'équation différentielle

$$y' + \alpha y = \varphi(t) \tag{E}$$

a) Soit f une solution de (E). On note g la fonction définie par $g(t) = f(t+T)$. Montrer que g est aussi une solution de (E).

b) En déduire qu'une solution f de (E) est T-périodique si, et seulement si, $f(0) = f(T)$.

c) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution T-périodique, sauf pour des valeurs exceptionnelles de α que l'on précisera.

7. On considère l'équation

$$(1-x)y' - y = g \tag{E}$$

où $g :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée.

a) Résoudre l'équation homogène associée.

b) On suppose que la fonction g est développable en série entière

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

de rayon de convergence $R \geq 1$.

Montrer que (E) admet au moins une solution développable en série entière en 0,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

de rayon de convergence $R' \geq 1$ et exprimer les a_n en fonction de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II Second ordre

8. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   a) $y'' - 2y' + y = e^{|x|}$. Existe-t-il des solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?
   b) $y'' + y' - 2y = (x+1)\operatorname{ch}(x)$ et $y'' + y' - 2y = (x+1)\operatorname{sh}(x)$.
9. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0.$$

   a) Montrez que la fonction $\varphi : x \longmapsto x/(1-x)$ est solution de (E).
   b) On pose $y = z \cdot \varphi(x)$. Déterminez l'équation différentielle (E') vérifiée par z.
   c) Intégrez l'équation différentielle (E'). Déduisez-en l'ensemble des solutions de (E) en indiquant soigneusement les intervalles de définition.
   d) Existe-t-il un solution de (E), non identiquement nulle et définie sur $]-\infty, 1[$, sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}$?
10. (CCP 2004) Résoudre $y'' + 4y = \cos(2x)$
11. (CCP 2004) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = x^2 + e^x$$

12. (TPE 2006 totalement revu) Soit a une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + a(t)y = 0.$$

   a) Soient u et v deux solutions de (E). On pose $W = uv' - u'v$. Montrer que W est une constante.
   b) i) Soit u une solution bornée de (E). Montrer que u' a une limite en $+\infty$ (On pourra se servir de l'écriture de u' à l'aide de u''). Montrer que cette limite est 0.

ii) Soit v une autre solution bornée de (E). Montrer que la fonction W définie au a) est nulle.

iii) En déduire successivement que $d = u(0)v - v(0)u$ est la fonction nulle puis que u et v sont colinéaires.

iv) Montrer qu'il existe des solutions non bornées de (E).

13. Soient p un fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs *négatives* et l'équation différentielle :

$$y'' + py = 0 \tag{E}$$

On se propose de montrer que toute solution non nulle de (E) possède au plus un zéro.

a) Soit f une solution non nulle de (E). On suppose que f s'annule en x_0. Montrer que $f'(x_0) \neq 0$; en déduire l'existence de $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\}, \quad f(x) \neq 0.$$

b) On suppose que f s'annule sur $]x_0, +\infty[$.

i) Montrer que f possède, dans l'intervalle précédent, un plus petit zéro, que l'on note x_1.

ii) Supposons, par exemple $f > 0$ sur $]x_0, x_1[$,. Déterminer les signes de $f'(x_0)$ et $f'(x_1)$. En déduire une contradiction.

c) Conclure.

14. Soient p_1 et p_2 deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que $p_1 \leq p_2$ sur I. On considère les deux équations différentielles :

$$y'' + p_1 y = 0 \tag{E$_1$}$$

$$y'' + p_2 y = 0 \tag{E$_2$}$$

a) Montrer que tout zéro a d'une solution non nulle y d'une de ces équations est isolé, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus \{a\}, \quad y(x) \neq 0.$$

b) Soit y_1 une solution non nulle de (E_1) et soit y_2 une solution de (E_2). Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 (s'ils existent), il y a un zéro de y_2. On pourra utiliser la fonction $w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.

c) Soient y_1 et z_1 deux solutions non liées de (E_1). Montrer que y_1 et z_1 n'ont pas de zéro commun et qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 (s'ils existent), il y a un zéro de z_1.

15. Soit l'équation différentielle

$$y'' + e^x y = 0 \tag{E}$$

Montrer que toute solution de (E) s'annule sur tout intervalle de longueur π inclus dans $\mathbb{R}_+$. On pourra utiliser $y'' + y = 0$.

16. (TPE 2006) Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ω un réel strictement positif. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + \omega^2 y = f.$$

a) Monter que la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^x \sin(\omega(x-t)) f(t) \, \mathrm{d}t$$

est solution de (E).

b) Résoudre (E).

17. Résoudre : $\cos(x) \cdot y'' + \sin(x) \cdot y' = \cos^3(x) \cdot y$. Indication : effectuer le changement de variables $u = \sin(x)$.

18. Résoudre $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$.

19. (CCP 2000) Résoudre $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^x$.

20. (CCP 2001, prolongement de 16) Soit f continue de $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. soit (E) : $y'' + y = f$.
    a) Montrer que toute solution de (E) est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
    b) Montrer qu'il existe une unique solution de (E) ayant une limite finie en $+\infty$.
21. Résoudre l'équation différentielle : $(1+x^2)y''+2xy'-2y = 2$.
22. (CCP 2003, HP ?) Résoudre $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{t}$.
23. Résoudre l'équation $x^2y'' + xy' - y = 2x$. On ne demande pas le recollement des solutions.
24. Résoudre l'équation différentielle $(t + 1)x'' - x' - xt = 0$ sachant que la fonction $t \longmapsto e^t$ est solution.
25. Soit f une application continue et bornée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 2y = f(x) \tag{E}$$

    a) Montrer que $x \longmapsto e^{-x} \displaystyle\int_0^x e^t \sin(x - t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est solution de (E).
    b) Résoudre E.
    c) Montrer que les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.
26. (CCP 2001) En considère l'équation :

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (x^2 + x)e^x + x^2 + x + 1$$

    Donner l'allure des solutions.
27. (CCP 2001) Résoudre $y''-4y = a|x|+b$. Montrer qu'il existe une unique solution pour laquelle la courbe admet des droites asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$.
28. (Mines 2001) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ (on pourra utiliser le changement de variables $x^2 = t$).

29. Soit $a \in \mathbb{R}$ et y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$y'' + |y| = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = 0.$$

   a) Montrer que $y \leq a$.
   b) Déterminer y si $a \leq 0$.
   c) On suppose $a > 0$. Montrer que y a exactement deux zéros $\alpha < 0 < \beta$. Déterminer y.

III Inclassables

30. (CCP 2003) Résoudre $f'(x) + f(-x) = e^x$.
31. (CCP 2004) Résoudre $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + f'(x)$.
32. (Centrale 2004, même thème que 30) Résoudre l'équation différentielle (E) : $f''(x) + f(-x) = -x + \cos(x)$.

IV Systèmes différentiels

33. (CCP 2000) Soit

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 2 & 10 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

   a) Trouvez des vecteurs V_1, V_2 et V_3 tels que $AV_1 = V_1$, $AV_2 = 4V_2$ et $AV_3 = 4V_3 + V_2$. Montrez que la famille (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) A étant la matrice d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique, trouvez la matrice J de u dans la base (V_1, V_2, V_3).
   c) Résoudre $\mathrm{d}Y/\,\mathrm{d}t = JY$.

d) Résoudre $\mathrm{d}X/\,\mathrm{d}t = AX$.

34. (TPE 1998) Soit n un entier pair. Résoudre le système différentiel $x_1' = kx_1 + x_n$, $x_2' = kx_2 + x_{n-1}$, $\ldots$, $x_n' = kx_n + x_1$

35. Soit

$$(S) \quad \begin{cases} x' = -x - 2y - z \\ y' = -2x - 3y - 3z \\ z' = x + 3y + 2z \end{cases}$$

Soit $t \longmapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ une solution de (S).

a) Déterminez une condition sur $M(0)$ pour que $M(t)$ ait une limite à distance finie quand $t \longrightarrow +\infty$.

b) Déterminez une condition sur $M(0)$ pour que $t \longmapsto M(t)$ soit périodique.

36. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Montrez que A et B sont semblables.

b) Résoudre le système

$$\begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x - y - 2z \\ z' = -2x + y - z \end{cases}$$

37. (CCP 2001) Résoudre le système

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} \\ y' = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}y \end{cases}$$

38. (CCP 2001) Résoudre $X' = AX$ avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et } A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

39. Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = -4x - 3y \\ y'' = -8x - 2y \end{array} \right.$$