Feuille d'exercices numéro 13
Équations différentielles
Indications et corrigés partiels

I Premier ordre

1. a) La méthode de la variation de la constante mène à une intégrale qu'on ne sait pas calculer. Mais une fonction simple (polynomiale) est solution...

   b) Les solutions sont de la forme :

$$y(x) = \frac{1}{x\cos(x)} + \frac{a}{\cos(x)}.$$

2. a) Les solutions sont de la forme :

$$y(x) = \frac{x - \arctan(x)}{x^2} + \frac{a}{x^2}$$

   b) La fonction f est donnée[1] par :

$$f(x) = \frac{x - \arctan(x)}{x^2}$$

   c) Une primitive de f est donnée par $\dfrac{\arctan(x)}{x} + \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$. On a donc :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$$

[1] C'est une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$...

3. Les solutions sont de la forme :

$$y(x) = 2(x^2 - 1) + a\sqrt{|x^2 - 1|}$$

Attention, on résout sur un des intervalles $]-\infty, -1]$, $]-1, 1[$ ou $]1, +\infty[$...

4. Les solutions sont de la forme :

$$g(t) = \frac{K + t^2}{\sqrt{1 - t^2}}$$

5. Si on note A la primitive de a qui s'annule en 0 alors les solutions de $y' - ay = 0$ sont les fonctions de la forme $y(x) = Ke^{A(x)}$. Comme a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} a(t)\,\mathrm{d}t$ converge (absolument) et donc A a une limite finie en $+\infty$. Les solutions de $y' - ay = 0$ ont donc une limite en $+\infty$ et elles sont donc bornées

6. a) Pour tout t, $g'(t) = f'(x+T) = -\alpha f(t+T) + \varphi(t+T) = -\alpha g(t) + \varphi(t)$. La fonction g est donc solution de (E).

   b) f est T-périodique si et seulement si pour tout t, $f(x+T) = f(t)$. En d'autres termes si et seulement si $g = f$. Or g est la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + \alpha y = \varphi(t) \\ y(0) = f(T) \end{cases}$$

   Par unicité de la solution à un problème de Cauchy, $f = g$ si et seulement si $f(0) = g(0) = f(T)$.

   c) Les solutions de (E) sont de la forme :

$$y(t) = e^{-\alpha t} y(0) + e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} \varphi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Donc f est une solution T-périodique de (E) si et seulement si

$$f(0) = f(T) = e^{-\alpha T} f(0) + e^{-\alpha T} \int_0^T e^{\alpha s} \varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

Cette équation n'a qu'une solution sauf si $1 = e^{-\alpha T}$. C'est-à-dire sauf si αT est un multiple entier de $2i\pi$.

7. a) Les solutions de $(1-x)y'(x) - y(x) = 0$ sur $]-1,1[$ sont de la forme :

$$y(x) = \frac{K}{x-1}$$

b)

II Second ordre

8. a) On résout d'abord sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$. Une solution sur $\mathbb{R}^*$ a alors la forme :

$$y(x) = \begin{cases} (a_- x + b_-)e^x + \dfrac{1}{4} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ (a_+ x + b_+)e^x + \dfrac{1}{2} x^2 e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Reste à recoller en 0. Pour cela il faut que $y(0^+) = y(0^-)$, $y'(0^+) = y'(0^-)$ et $y''(0^+) = y''(0^-)$.
On trouve alors $a_- = a_+ - 1/4$ et $b_- = a_+ + 1/2$. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc un ensemble qui dépend de deux paramètres a_+ et b_+...

b) On résout d'abord :

$$y'' + y' - 2y = (x+1)e^x$$

de solutions de la forme $y(x) = ae^x + be^{-2x} + \dfrac{1}{18} x(4+3x)e^x$

puis :

$$y'' + y' - 2y = (x+1)e^{-x}$$

de solutions de la forme $y(x) = ae^x + be^{-2x} - \dfrac{1}{4}(1+2x)e^{-x}$.
Puis on superpose à l'aide de la définition de ch et sh...

9. Attention ici, on résout sur l'intervalle I qui est un des trois intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$...
a) Du calcul !
b) z est solution[2] de :

$$x^2(1-x)(z''\varphi(x) + 2z'\varphi'(x)) - x(1+x)z'\varphi(x) = 0$$

C'est-à-dire de[3] :

$$x^3 z'' + x^2 z' = 0$$

c) On trouve $z(x) = a + b\ln(|x|)$. (Toujours sur I). On a donc : $y(x) = \dfrac{x(a + b\ln(|x|))}{1-x}$...
d) Réponses aux trois cas :
i) Oui : $y(x) = a\dfrac{x}{1-x}$ avec $a \neq 0$.
ii) Oui : $y(x) = b\dfrac{x\ln(x)}{1-x}$ avec $b \neq 0$.
iii) Non.

10. On résout pour les seconds membres x^2 et e^x, puis on superpose. Les solutions sont de la forme :

$$y(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x) + \frac{1}{4}x\sin(2x)$$

[2]Attention : on ne remplace PAS tout de suite $\varphi(x)$ par sa valeur
[3]Là on remplace $\varphi(x)$ par sa valeur !

11. Les solutions sont de la forme :

$$y(x) = e^{-x/2}\big(a\cos(\sqrt{3}x/2) + b\sin(\sqrt{3}x/2)\big) + x^2 - 2x + \frac{1}{3}e^x.$$

12. a) On a $W' = 0$. La fonction W est donc une constante !

    b)i) Tout d'abord, comme u est bornée, au est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et donc u' (qui est une primitive de $-au$) a une limite ℓ en $+\infty$.
    Or si $\ell \neq 0$ alors u/ℓ n'est pas bornée (u/ℓ est une primitive de u'/ℓ etc.).
    In fine : si u est une solution bornée de (E) alors $u' \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

    ii) La fonction W du a) est constante. Or en utilisant le b)i), quand $t \longrightarrow +\infty$ on a $W(t) \longrightarrow 0$. Donc W est la fonction nulle.

    iii) On a $d(0) = 0$ et $d'(0) = 0$ (car $W(0) = 0$). Comme d est combinaison linéaire de solutions de (E), d est solution de (E). Les conditions initiales $d(0) = d'(0) = 0$ permettent de conclure que $d = 0$ et que donc u et v sont colinéaires.

    iv) Deux solutions bornées sont donc colinéaires. Un système fondamental de solutions de (E) contient donc forcément une solution non bornée.

13. a) On a déjà $f(x_0) = 0$. Si on avait en plus $f'(x_0) = 0$ alors, d'après le théorème de Cauchy, f serait la fonction nulle (puisque la fonction nulle est solution du même problème de Cauchy).
    Au voisinage de x_0, on a donc $f(x) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$
    La définition de limite impose l'existence de α.

b)i) Pas évident. Notons Z l'ensemble des zéros de f appartenant à $]x_0, +\infty[$. D'après le a., on a $Z \subset [x_0+\alpha, +\infty[$. De plus l'énoncé suppose que Z est non vide.
L'ensemble Z a donc une borne inférieure β. On a alors deux choix : β est un zéro de f ou β n'est pas un zéro de f.
Supposons que β ne soit pas un zéro de f, c'est à dire que $\beta \notin Z$. Il existe donc (d'après la définition de borne inférieure qui n'est pas un minimum) une suite (z_n) d'éléments de Z qui converge vers β. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(z_n) = 0$, on a par continuité de f, $f(\beta) = 0$ et donc $\beta \in Z$ (ce qui est absurde).
Le réel $x_1 = \beta$ convient donc.

ii) On a forcément $f'(x_0) > 0$ et $f'(x_1) < 0$ (les dérivées sont non nulles d'après le a.) Or :

$$\begin{aligned} f'(x_1) - f'(x_0) &= \int_{x_0}^{x_1} f''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{-p(t)f(t)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}t \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ce qui est absurde vu les signes de $f'(x_0)$ et $f'(x_1)$.
On aurait, bien sur, la même absurdité si $f < 0$ sur $]x_0, x_1[$.

c) La fonction f ne peut avoir de zéro sur $]x_0, +\infty[$; elle a donc au plus un zéro sur $\mathbb{R}$.

14. a) Même réponse qu'au 13.a.

b) Pas simple sans indications. On remarque que w vérifie :

$$\begin{aligned} w' &= y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_2y_1'' - y_2'y_1' \\ &= (p_1 - p_2)y_1y_2 \end{aligned}$$

Procédons par l'absurde en supposant que y_1 s'annule en u et v tels que $u < v$ et que y_2 ne s'annule pas sur $[u, v]$. Quitte à remplacer les fonctions y_1, y_2 par leur opposé (ce qui ne change rien pour les zéros) supposons que y_1 et y_2 sont strictement positives sur $]u, v[$.
sur l'intervalle $[u, v]$, la fonction w' est donc négative. La fonction w décroît donc sur $[u, v]$. Or (même argument qu'au 13.b.ii) :

$$\begin{aligned} w(u) &= -y_2(u)y_1'(u) < 0 \\ w(v) &= -y_2(v)y_1'(v) > 0 \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire avec la décroissance de w...

c) Si y_1 et z_1 s'annulent en α, leur wronskien s'annulera aussi en α et donc y_1 et z_1 sont liées.
Ensuite, on applique le b. à $p_2 = p_1$ et $y_2 = z_1$...

15. On applique le 14 à $p_1(x) = 1$ et $p_2(x) = e^x$...

16. a) Calcul !

    b) On utilise le paradigme « solution particulière+solution générale » pour montrer que les solutions dee (E) sont de la forme :

$$y(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) + g(x)...$$

17. Faire un changement de variables c'est faire un changement de fonction inconnue. On se place donc sur un intervalle de la forme $I =]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$. On va donc utiliser une fonction[4] z, définie et deux fois dérivables sur $J =]-1, 1[$ et telle que $z(u) = y(x)$. On a alors :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \cos(x)z'(\sin(x)) \\ y''(x) &= -\sin(x)z'(\sin(x)) + \cos^2(x)z''(\sin(x)) \end{aligned}$$

[4] C'est légitime car cos est une bijection $\mathcal{C}^\infty$ de I sur J...

L'équation devient alors :

$$\forall x \in I, \quad -\cos(x)\sin(x)z'(\sin(x)) + \cos^3(x)z''(\sin(x)) \\ + \sin(x)\cos(x)z'(x) = \cos^3(x)z(\sin(x))$$

Ce qui équivaut à

$$\forall u \in J, \quad z''(u) - z(u) = 0$$

On a donc z de la forme : $z(y) = ae^{u} + be^{-u}$ et donc, pour tout $x \in I$, $y(x)$ est de la forme :

$$y(x) = ae^{\sin(x)} + be^{-\sin(x)}$$

18. Résolvons sur I valant $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Cherchons une solution de la forme $y_0 = x^{\alpha}$. On a alors :

$$x^2y_0''(x) + xy_0'(x) - 4y_0(x) = (\alpha^2 - 4)x^{\alpha}$$

On voit que les valeurs 2 et -2 conviennent pour α
Les fonctions définies par $y_1(x) = x^2$ et $y_2(x) = 1/x^2$ sont donc solutions sur I Comme elles sont clairement linéairement indépendantes, les solutions de l'équation originale sont de la forme :

$$y(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}.$$

19. Cherchons une solution « simple ». On voit rapidement qu'il n'existe pas de solution polynomiale ou puissance. Essayons[5] une solution de la forme $y_0(x) = \varphi(x)e^x$. On a :

$$(1+x)y_0''(x) - 2y_0'(x) + (1-x)y_0(x) = \big((1+x)\varphi''(x) + 2x\varphi'(x)\big)e^x$$

On remarque tout de suite deux choses :

[5] Le pifomètre ! On n'a pas d'autre choix...

- la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2}xe^x$ est solution de l'équation avec second membre ;
- la fonction $x \longmapsto e^x$ est solution de l'équation sans second membre associé.

Pour que y_0 soit solution de l'équation sans second membre associée, il faut et il suffit que φ soit solution de :

$$(1+x)z'' + 2xz' = 0$$

Ce qui nous donne φ' de la forme :

$$\varphi'(x) = a(1+x)^2 e^{-2x}$$

Un calcul de primitive donne φ sous la forme :

$$\varphi(x) = b + a(5 + 6x + 2x^2)e^{-2x}$$

Les solutions de l'équation originale sont donc de la forme :

$$y(x) = be^x + a(5 + 6x + 2x^2)e^{-x} + \frac{x}{2}e^x$$

20. On est dans la situation du 16 avec $\omega = 1$.
a) Les solutions de (E) s'écrivent donc sous la forme :

$$y(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or puis que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left|\int_0^x \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Une solution de (E) es donc la somme de trois fonctions bornées ; elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$.

b) L'intégrale étudiée précédemment a une limite quand $x \longrightarrow +\infty$. Les termes précédents dans une solution de (E) peuvent se mettre sous la forme $\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)$. ceci n'a de limite en $+\infty$ que si et feulement si $\sqrt{a^2+b^2}=0$, c'est-à-dire ssi $a=b=0$.

21. Cherchons les solutions polynomiales non nulles de l'équation (avec ou sans second membre). Le degré d d'une telle solution[6] vérifie $d^2+d-2=0$, donc $d \in \{1,-2\}$. La seule valeur raisonnable de d est $d=1$. On cherche α et β tels que $y(x)=\alpha x+\beta$ soit solution. Un calcul rapide montre que :

    - Les fonctions de la forme αx sont solutions de l'équation sans second membre ;
    - la fonction constante $x \longmapsto -1$ est solution de l'équation avec second membre.

    Cherchons alors les solutions de l'équation sans second membre de la forme $y(x)=z(x)\cdot x$. La fonction z est alors solution de l'équation différentielle :

    $$(1+x^2)\cdot xz''+2(1+2x^2)z'=0$$

    On obtient alors z' de la forme :

    $$z'(x)=\frac{a}{x^2(1+x^2)}=a\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)$$

    La fonction z sera alors de la forme :

    $$z(x)=b-a\cdot\left(\frac{1}{x}-\arctan(x)\right)$$

    Les solutions de l'équation originale seront alors de la forme :

    $$y(x)=-1+bx-a(1+x\arctan(x))$$

[6] Observer les termes de « plus haut » degré...

22. Méthode HP ! Variations des deux constantes sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
23. On résout sur l'intervalle I qui vaut soit $\mathbb{R}_+^*$, soit $\mathbb{R}_-^*$. Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto 1/x$. sont deux solutions de l'équation sans second membre associée. Une solution particulière s'obtient par la variation en cherchant celle-ci sous la forme $y(x) = xz(x)$. On trouve, par exemple : $x \longmapsto x\ln(|x|)$.
24. Variation d'une constante. Solutions de la forme $x \longmapsto ae^t + b(2t+3)e^{-t}$.
25. Les solutions sont de la forme :
$$x \longmapsto e^{-x}(a\cos(x) + b\sin(x)) + e^{-x}\int_0^x e^t \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$
Reste à majorer les valeurs absolues...
28. La fonction $x \longmapsto t = x^2$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. Considérons la fonction z définie par l'équation $z(t) = y(x)$. C'est à dire $z(x^2) = y(x)$. On a :
$$\begin{aligned} y(x) &= z(x^2), \\ y'(x) &= 2xz'(x^2), \\ y''(x) &= 2z'(x^2) + 4x^2z''(x^2). \end{aligned}$$
L'équation de départ est donc équivalente à :
$$\forall x > 0,\ x\big(2z'(x^2) + 4x^2z''(x^2)\big) - 2xz'(x^2) + 4x^3z(x^2) = 0$$
Après simplification, on trouve $4x^3\big(z''(x^2)+z(x^2)\big) = 0$. Ceci permet de dire que :
$$\forall t > 0,\ z''(t) + z(t) = 0.$$
On trouve alors que z est de la forme :
$$z(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$$
Et donc
$$\forall x > 0,\ y(x) = a\cos(\sqrt{x}) + b\sin(\sqrt{x}).$$

III Inclassables

30. Par analyse et synthèse.
Analyse Si f est solution de l'équation
$$f'(x) + f(-x) = e^x \tag{E}$$
alors $f''(x) - f'(-x) = e^x$. Or $f'(-x) + f(x) = e^{-x}$, donc $f''(x) + f(x) = 2\operatorname{ch}(x)$. C'est à dire que f est solution de :
$$y'' + y = 2\operatorname{ch}(x). \tag{E$_1$}$$
Synthèse
Si f est solution de (E$_1$) alors f est de la forme $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \operatorname{ch}(x)$. On a alors :
$$f'(x) + f(-x) = (a+b)\cos(x) - (a+b)\sin(x) + e^x$$
Donc f est solution de (E) si et seulement si $a + b = 0$. Les solutions de (E) sont donc de la forme :
$$f(x) = a\cos(x) - a\sin(x) + \operatorname{ch}(x)$$

31. Toujours par analyse et synthèse. Si f est solution de l'équation intégro-différentielle de l'énoncé alors f est dérivable et donc $1 + f'$ est $\mathcal{C}^1$ (primitive d'une fonction continue). f est alors solution de $f = f''$ et est donc de la forme $f(x) = a\operatorname{ch}(x) + b\operatorname{sh}(x)$.
Réciproquement si f est de la forme précédente alors :
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = a\operatorname{sh}(x) + b\operatorname{ch}(x) - b$$
$$1 + f'(x) = a\operatorname{sh}(x) + b\operatorname{ch}(x) + 1$$
Les solutions du problème de l'énoncé sont donc de la forme :
$$f(x) = a\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$$

IV Systèmes différentiels

33. a) On trouve, par exemple :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; V_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul du déterminant $\det(V_1, V_2, V_3)$ montre qu'il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Les équations définissant les vecteurs V_i donnent :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

c) On trouve :

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^t \\ (k_2 + k_3 t)e^{4t} \\ k_3 e^{4t} \end{pmatrix}$$

où k_1, k_2 et k_3 sont des constantes réelles.

d) On trouve enfin :

$$X(t) = k_1 e^t V_1 + (k_2 + k_3 t)e^{4t} V_2 + k_3 e^{4t} V_3.$$

34. Notons $n = 2m$. Observons le système différentiel : l'équation numéro i est $x'_i = kx_i + x_{n+1-k}$. On voit donc que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on a deux équations :

$$\begin{cases} x'_i = kx_i + x_j \\ x'_j = x_i + kx_j \end{cases} \quad (\text{où } j = n + 1 - i)$$

système qui équivaut à :

$$\begin{cases} s_i' = (k+1)s_i \\ d_i' = (k-1)d_i \end{cases} \text{où} \begin{cases} s_i = x_i + x_j \\ d_i = x_i - x_j \end{cases}$$

On le résout pour trouver successivement :

$$\begin{cases} s_i = u_i e^{(k+1)t} \\ d_i = v_i e^{(k-1)t} \end{cases} \text{puis} \begin{cases} x_i = \dfrac{1}{2}(u_i e^{(k+1)t} + v_i e^{(k-1)t}) \\ x_j = \dfrac{1}{2}(u_i e^{(k+1)t} - v_i e^{(k-1)t}) \end{cases}$$

35. La matrice associée au système vérifie :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = PDP^{-1}$$

où

$$D = \mathrm{diag}(-2, i, -i),$$
$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1-i & -1+i \\ -1 & -1+i & -1-i \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

En notant V_1, V_2 et V_3 les trois colonnes de P, les solutions de $X' = AX$ sont alors de la forme :

$$X(t) = C_1 e^{-2t} V_1 + C_2 e^{it} V_2 + C_3 e^{-it} V_3$$

Où C_1, C_2 et C_3 sont trois constantes complexes.

a) M aura une limite finie quand $t \longrightarrow +\infty$ si et seulement si $C_2 = C_3 = 0$, c'est à dire $M(0)$ colinéaire à V_0.

b) M sera périodique si et seulement si $C_1 = 0$, c'est à dire $M(0)$ colinéaire à V_2 et V_3, c'est à dire $\det(M(0), V_2, V_3) = 0$.