Feuille d'exercices numéro 2 Espaces vectoriels, endomorphismes

I Petits exercices

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = f^2 + 2f$. Soient $\mathrm{E}_1 = \ker f$, $\mathrm{E}_2 = \ker(f + \mathrm{Id})$ et $\mathrm{E}_3 = \ker(f - 2\,\mathrm{Id})$.
   a) Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 \oplus \mathrm{E}_3$.
   b) Soient p_1 le projecteur sur E_1 parallèlement à $\mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3$, p_2 le projecteur sur E_2 parallèlement à $\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_3$ et p_3 le projecteur sur E_3 parallèlement à $\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$. Exprimer f à l'aide de p_1, p_2 et p_3.
   c) En déduire qu'il existe trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a_n p_1 + b_n p_2 + c_n p_3.$$
   d) Montrer qu'il existe trois suites $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a'_n \,\mathrm{Id} + b'_n f + c'_n f^2$$
   et les calculer.
2. Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique, on considère les vecteurs $a_1 = (1, 3, -1)$ et $a_2 = (2, -4, 0)$. Montrez que la famille $\{a_1, a_2\}$ est libre et déterminez une équation du plan P engendré par ces vecteurs.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   a) Montrer que AB est la matrice d'un projecteur. Déterminez $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$.
   b) Montrez que $BA = I_2$.
4. (Centrale 2001) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $u \neq 0$ et $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ ait une des deux formes ci après :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   et que ces deux cas s'excluent.
5. (CCP 2001) soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$.
   a) Trouver une condition suffisante et nécessaire pour que l'endomorphisme $e + hf$ soit inversible avec $h \in \mathbb{R}$ et e l'identité de E.
   b) Calculer alors cet inverse.
6. (CCP 2001) Montrer que toute forme linéaire f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut se mettre sous la forme $f(X) = \mathrm{tr}(MX)$ avec M une matrice convenablement choisie.
7. (INT 2001) Soient E un espace vectoriel de dimension finie, f, g des endomorphismes de E tels que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \mathcal{GL}(\mathrm{E})$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$.
8. Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie E tels que $p \circ q = 0$. Montrez que $f = p + q - q \circ p$ est également un projecteur de E et qu'il est tel que $\ker(p) \cap \ker(q) \subset \ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

9. (CCP 2002) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, où E est un espace vectoriel de dimension n.

   a) Montrer que si f est un projecteur alors $\ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \ker(f) = \mathrm{E}$.

   b) Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(f - \mathrm{Id}) = n$.

10. (CCP 2002) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E. on suppose que $\mathrm{E} = \ker(f) + \ker(g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Montrer que ces deux sommes sont directes.

11. (Centrale 2003) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -\mathrm{Id}$.

    a) Montrer que si $\{x_1, \dots, x_p, f(x_1), \dots, f(x_{p-1})\}$ est une famille libre alors la famille

    $$\{x_1, \dots, x_p, f(x_1), \dots, f(x_{p-1}), f(x_p)\}$$

    est aussi une famille libre de E.

    b) Montrer que : $(\exists f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}) \iff (n$ est pair).

    c) Soit $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_{2p}$ Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.

12. (Centrale 2003, CCP 2008) Soient E et F deux espaces vectoriels et soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ tels que $f \circ g \circ f = f$, $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $\mathrm{E} = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{F} = \ker(g) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

13. (Centrale 2004) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie paire $n = 2p$ et soit f un endomorphisme de E. Montrer

l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(a) $f^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(f) = p$
(b) $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$
(c) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ 0_p & 0_p \end{pmatrix}$

14. (CCP 2004) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On considère les quatre propositions suivantes :

$$\begin{array}{ll} (a) & \mathrm{E} = \ker(f) + \mathrm{Im}(f) \\ (b) & \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f) \\ (c) & \mathrm{E} = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \\ (d) & \ker(f^2) = \ker(f) \end{array}$$

a) Montrer que (a) et (b) sont équivalentes.
b) Montrer que si E est de dimension finie alors les quatre propositions sont équivalentes.

15. (Mines 2004) Soient n réels $0 \leq a_1 < \cdots < a_n$. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ on pose $f_k(x) = \dfrac{1}{x^2 + a_k^2}$. Cette famille est-elle libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
16. (École de l'Air 2004) Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \exists p \in \mathbb{N}^*, \quad u^p(x) = 0.$$

Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0$. Ce résultat reste-t-il vrai en dimension infinie ? Si non fournir un contre-exemple.
17. (CCP 2005) E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

a) Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ soit une famille libre de E. Que peut-on en déduire pour n et p ?

b) Application : $\dim(\mathrm{E}) = 2$, $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$; montrer que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$ est impossible.

18. (CCP 2003) Montrer que $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = P(0)\}$ est un espace vectoriel et trouver sa dimension.

19. Soient f_0, f_1, …, f_n $(n+1)$ formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$ définies par $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f_i(P) = P(b_i)$ où les b_i $(0 \leq i \leq n)$ sont des réels donnés.

    a) Prouvez l'équivalence : $(f_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est libre si et seulement si les réels b_0, b_1, …, b_n sont deux à deux distincts.

    b) Dans ce cas soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Prouvez qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 f(x)P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} a_i P(b_i).$$

20. (CCP 2004) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On suppose qu'il existe deux réels non nuls et distincts a et b vérifiant $(u - a\,\mathrm{Id}) \circ (u - b\,\mathrm{Id}) = 0$. Soient $p = \dfrac{1}{b-a}(u - a\,\mathrm{Id})$ et $q = \dfrac{1}{a-b}(u - b\,\mathrm{Id})$.

    a) Calculer $p+q$, $p \circ p$, $p \circ q$, $q \circ q$ et $q \circ p$.

    b) Montrer que $\mathrm{E} = \ker(p) \oplus \ker(q)$.

    c) Trouver les éléments propres de u. u est-il diagonalisable ?

II Escp 2009 – 2.11

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On considère la matrice J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe α pour lequel :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\,,\ \alpha = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}$$

1. Montrer $\mathcal{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que l'application d définie sur $\mathcal{C}$ à valeurs réelles par :

   $$d(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}$$

   est une application linéaire surjective non injective.
3. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe un réel λ tel que $AJ = JA = \lambda J$.

   b) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{C}$. Montrer que AB appartient à $\mathcal{C}$ et calculer $d(AB)$.

   c) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{C}$. Montrer que A^{-1} appartient à $\mathcal{C}$ et trouver une relation entre $d(A)$ et $d(A^{-1})$.
4. Montrer que $\ker(d)$ et $\mathrm{vect}(J)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{C}$.
5. Soit $(r,s) \in [\![2,n]\!]^2$. On note $A_{r,s}$ la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf $a_{1,1} = a_{r,s} = 1$ et $a_{1,s} = a_{r,1} = -1$. Démontrer que la famille $(A_{r,s})_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2}$ forme une base de $\ker(d)$ et en déduire la dimension de $\mathcal{C}$.
6. Soit p un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{C}$.
   Montrer que $B = \dfrac{d(A)}{n} J$ est solution de l'équation :

   $$A^p - B^p = (A - B)^p.$$

III Polynômes de Lagrange

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{E} = \mathbb{K}_n[X]$ et on suppose que a_0, a_1, $\dots$, a_n sont $n+1$ éléments *distincts* de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que l'application Φ définie pour tout $P \in \mathrm{E}$ par $\Phi(P) = \big(P(a_0), \dots, P(a_n)\big) \in \mathbb{K}^{n+1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Dorénavant, on pose pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $L_i = \displaystyle\prod_{k \neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$.

2. Déterminer $L_i(a_j)$. On distinguera les cas $i = j$ et $i \neq j$.
3. a) On pose $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$. Déterminer $Q(a_i)$ (attention aux indices *muets*).

   b) Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre. En déduire qu'il s'agit d'une base de E.

   c) Montrer que pour tout $P \in \mathrm{E}$, $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$.
4. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ et tout $P \in \mathrm{E}$, on pose $\varphi_i(P) = P(a_i)$.

   a) Justifier que φ_i est une forme linéaire sur E.

   b) Montrer que la famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est libre dans $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$.