Feuille d'exercices numéro 2
Indications et corrigé partiels

I Petits exercices

1. a) Il faut résoudre l'équation $x = x_1 + x_2 + x_3$ avec, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $x_i \in \mathrm{E}_i$. On procède par analyse et synthèse.
   b) Les trois projecteurs ont été trouvés à la question précédente. Que vaut $f(x_1 + x_2 + x_3)$?
   c) Récurrence rapide.
   d) Et les p_i ils valent quoi ?
2. On pourra chercher un vecteur normal au plan, ou utiliser un déterminant d'ordre 3.
3. a) Il faut pouvoir encadrer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$ à l'aide de $\mathrm{rg}(AB)$ et d'autres informations.
   b) Commencez par calculer $\mathrm{rg}(BA)$ (on encadre en utilisant le fait que AB projecteur) puis $BABABA$ vaut et donc...
4. D'abord traduire les hypothèses à l'aide d'inclusions entre le noyau et l'image. On introduit ensuite H tel que $\mathrm{E} = \ker(u) \oplus H$...
5. Les deux en même temps. Calculer $u^2 = (e + hf)^2$ et trouver une relation polynomiale de degré 2 vérifiée par u.
6. Utiliser la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $X = \sum_{i,j} x_{i,j} E_{i,j}$...
7. Observer $\mathrm{Im}(f+g)$, $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$ pour montrer que $\dim(\mathrm{E}) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$. Quelle inégalité déduit-on de $f \circ g = 0$?
10. Si on nota $a = \mathrm{rg}(f)$, $b = \mathrm{rg}(g)$, déduire des deux égalités données des inégalités sur a et b pour en déduire le résultat.
11. Plus difficile...

a) Utiliser la contrainte $f^2 = -\operatorname{Id}$, pour éliminer le coefficient de $f(x_p)$.
b) Voir que si n est impair alors le résultat précédent coince..
c) Utiliser une base de la forme donnée par la première question.

12. Analyse et synthèse
13. On tourne en rond $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$...
15. Délicat. Principes proches du III. On introduit les polynômes $A = \prod_{j=1}^{n}(X^2+a_j^2)$, $P_k = \prod_{j\neq k}(X^2+a_j^2)$. L'équation $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = 0$ devient alors $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k P_k(x) = 0$. On est alors amené à observer le polynôme $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k P_k$ et notamment à le calculer en ia_ℓ pour voir que $\alpha_\ell = 0$.
16. Utiliser une base de E. Voir l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.
17. a) Tenter de résoudre l'équation

$$a_0 x + a_1 f(x) + \cdots a_{n-1} f^{p-1}(x) = 0.$$

On composera par f^{p-1}, puis f^{p-2} etc.

b) Quelle est la relation entre le cardinal d'une famille libre et la dimension ?

19. Utiliser les polynômes de Lagrange : $L_i = \prod_{k\neq i} \frac{X-b_k}{b_i-b_k}$. On voit que $f_i(L_j) = \delta_{i,j}$.