Feuille d'exercices numéro 6 Convergence dominée Applications

I Suites et séries

1. Pour les questions suivantes : déterminer pour n fixé l'existence de l'intégrale I_n, puis, si possible la limite de la suite (I_n)

   a) $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. Donner en plus un équivalent simple de I_n.

   b) $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\cos(t)}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

   c) $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} t^{-1/n}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit f une fonction continue sur $[1, e]$. Montrer que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_1^{1+1/n} nf(x^n)\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$.

   a) Justifier l'existence de I_n.

   b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n$.

   c) Déterminer un développement limité de I_n à l'ordre 2 en puissances de $1/n$. On pourra faire le changement de variables $x = t^{1/n}$.

4. a) Justifier l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de
$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$
et montrer que $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ (on pourra faire le changement de variables $u = 1 - t/n$ puis intégrer par parties.

   b) En déduire que l'intégrale impropre $\gamma = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que
$$\gamma = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$$

5. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$. On utilisera le fait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $e^{\alpha} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$.

6. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t(\ln t)^2}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3}$. Se souvenir de la somme de $\displaystyle\sum_{n \geq 0} q^n$.

7. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\,\mathrm{d}x$.

II Intégrales dépendant d'un paramètre

8. [CCP 2001] Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Étudier la continuité, la dérivabilité et calculer la dérivée de f.

b) Donner une relation entre $f(x)$ et $h(y) = \displaystyle\int_0^y e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour y bien choisi. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

9. Soit f définie [1] par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

a) Indiquer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f. Peut-on réduire son domaine d'étude ? Montrer que f est bornée sur $\mathcal{D}_f$. Calculer $f(0)$ et $\sup\{|f(x)| \mid x \in \mathcal{D}_f\}$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$, donner une expression de $f'(x)$ et $f''(x)$. Calculer $f'(0)$ et $f''(0)$.

c) Calculer $f(x)+f''(x)$ en fonction de $f'(x)$ (on pourra utiliser une intégration par parties) et en déduire que f vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre.

10. [CCP 2004] Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(t^2+x^2)}$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en 0.

11. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $f'(x)$.

12. [CCP 2003, TPE 2005] Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\cdot e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Déterminez le domaine de définition de f. Montrez que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre

1. On a $f = \dfrac{\pi}{2} J_0$ où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0 qui apparaît naturellement lors de la recherche des modes propres de vibration d'un tambour circulaire

(en fait $2y' + xy = 0$) puis explicitez f. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

13. [Centrale 2001, TPE, Mines 2005] Soit
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
a) Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
b) Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$.
c) Étudier la dérivabilité de f et trouver un intervalle sur lequel on ait $f'(x) - f(x) = \dfrac{c}{\sqrt{x}}$.
d) Exprimer c sous la forme d'une intégrale et la calculer.

14. Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
a) Déterminer son domaine de définition.
b) Étudier les variations de F.
c) Montrer que $F(x) + F(1/x)$ est constant sur $\mathbb{R}_+^*$.

15. [CCP 2002, Mines 2006] donner le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(t)e^{-tx}\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^0$, puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce domaine. Donner un équivalent de f en 0 puis en $+\infty$.

16. Soit $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2}\,\mathrm{d}t$. Déterminer $\mathcal{D}_f$, la continuité, dérivabilité de f. Trouver une équation différentielle vérifiée dont f est solution. en déduire f.

17. [ENSEA 2002] Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ et donner le signe de f''.

18. [Centrale 2002] Soient u et v les fonctions définies par

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$
$$v(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

   a) Donner le domaine de définition $\mathcal{C}$ de u et v. Étudier la continuité de u et v. Les fonctions u et v sont-elles $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$?
   b) Soit $z = u + iv$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par z. La résoudre et déterminer u et v.
19. [TPE 2004, variante de 18] Étudier l'existence de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,$$

   sa continuité puis sa dérivabilité. Enfin en donner une expression.
20. [Mines 2002, 2005] Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\,\mathrm{d}t$. Existence et calcul de f. Continuité, dérivabilité de f, dérivabilité de f en 0.
21. [Mines 2003] On considère la fonction

$$f : x \longmapsto \int_0^{\pi/2} \arctan(x \cdot \tan(t))\,\mathrm{d}t.$$

   a) Étudier f.
   b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) + f(1/x) = \pi^2/4$. Que dire pour $x < 0$?
   c) Déterminer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

22. [CCP 2003] On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
   a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$. On séparera les cas $x = 0$ et $x > 0$.
   b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
   c) Déterminer $\lim\limits_{+\infty} F$.
   d) Calculer F'.
   e) En déduire F.
23. [Centrale 2005, variante de 22] Soit E l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f \in$ E. On pose [2]

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Vérifier que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$
   c) Quelle est la limite de F en $+\infty$?
   d) Vérifier que $f : t \longmapsto \sin(t)/t$ si $t > 0$ et $f(0) = 1$ appartient à E. Calculer $F'(x)$ et en déduire F.
24. [CCP 2009]
   a) i) Déterminer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \dfrac{u}{n}\right)^n$ en fonction de $u \in \mathbb{R}_+$.
      ii) Montrer que pour tout $u \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \dfrac{u}{n}\right)^n \geq 1 + u$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale u_n converge, où :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\left(1 + t^4\right)^n}\,\mathrm{d}t.$$

   c) On note :

$$\alpha = \int_0^{+\infty} u^{-1/4} e^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

2. la transformée de Laplace de f.

i) Montrer la convergence de l'intégrale α.

ii) À l'aide du changement de variables $t = \left(\dfrac{u}{n}\right)^{1/4}$, montrer que :

$$u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{4n^{3/4}}.$$

d)i) Calculer u_1.

ii) Déterminer une relation entre u_n et u_{n+1}.

iii) Après avoir montré qu'elle converge, déterminer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$.