ENS PC 2018 - Corrigé

Partie I

1. • En identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$, un élement de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ est un n^2-uplet d'éléments de $\{-1,1\}$.
   D'où $\text{Card}(\mathcal{M}_n(\{-1,1\})) = 2^{n^2}$.
   • $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ n'est-pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car il ne contient par $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
2. • Notons $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $Y = (y_j)_{1\leq j\leq n}$.
   Alors ${}^tXAY = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{i,j} y_j$ et, par suite,
$$\begin{aligned}|{}^tXAY| &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i a_{i,j} y_j| \quad \text{(inégalité triangulaire)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i|.|a_{i,j}|.|y_j| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 \quad (\text{car } x_i, y_j, a_{i,j} \in \{-1,1\})\\ &= n^2.\end{aligned}$$
   donc $S(A) \subset [-n^2, n^2]$.
   De plus, ${}^tXAY$ est un entier (comme somme et produit d'entiers, donc $S(A) \subset [\![-n^2, n^2]\!]$.
   • Pour tout $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, notons
$$E = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 : x_i a_{i,j} y_j = 1\}, \quad e = \text{Card}(E), \quad F = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 : x_i a_{i,j} y_j = -1\}, \quad f = \text{Card}(F).$$
   Alors il est clair que (E,F) forme une partition de $[\![1,n]\!]^2$, donc $e + f = n^2$.
   De plus, ${}^tXAY = e - f$, donc on a ${}^tXAY = n^2 - 2f$.
   On a donc $S(A) \subset \{n^2 - 2f,\ f \in [\![0,n]\!]\}$, ce qui prouve bien l'inclusion stricte demandée (par exemple, $n^2 - 1 \notin S(A)$).
   • Enfin, si $k \in S(A)$, alors il existe $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$ tels que $k = {}^tXAY$.
   Alors, en prenant $X' = -X \in \{-1,1\}^n$, on a ${}^tX'AY = -{}^tXAY = -k \in S(A)$, donc $S(A)$ est bien un ensemble symétrique.
3. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ telles qu'il existe des matrices diagonales C et D ne contenant que des 1 et des -1 sur la diagonale, telles que $B = CAD$.
   • Si $k \in S(B)$, alors il existe $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$ tels que $k = {}^tXBY$.
   Alors, en posant $X' = CX$ et $Y' = DY$, X' et Y' sont dans $\{-1,1\}^n$ (car $\{-1,1\}$ est stable par multiplication) et
$${}^tX'AY' = {}^t(CX)A(DY) = {}^tX{}^tCADY = {}^tXCADY = {}^tXBY = k,$$
   donc $k \in S(A)$.
   • $C^2 = I$ et $D^2 = I$, donc C est son propre inverse, ainsi que D.
   D'où, comme $B = CAD$, on a $CBD = A$, donc, en reprenant le point précédent en inversant les rôles de A et B, on obtient $S(A) \subset S(B)$.
   • Par double inclusion, on a $S(A) = S(B)$.
4. Soit $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ deux éléments de $\{-1,1\}^2$.
   • Alors ${}^tXIY = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$.
   Comme $(x_1 + x_2) \in \{-2,0,2\}$ et $(y_1 + y_2) \in \{-2,0,2\}$, on a ${}^tXAY \in \{-4,0,4\}$.
   Par suite, $S(I) \subset \{-4,0,4\}$.
   De plus, pour $X = (1,1)$ et $Y = (1,1)$, ${}^tXIY = 4$, donc $4 \in S(I)$.
   Pour $X = (-1,1)$ et $Y = (1,1)$, ${}^tXIY = 0$, donc $0 \in S(I)$.
   Enfin, $S(I)$ est un ensemble symétrique, donc $-4 \in S(I)$.
   Par suite, on a $\boxed{S(I) = \{-4,0,4\}.}$
   • ${}^tXJY = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + -x_2y_2 = \underbrace{(x_1 + x_2)(y_1 - y_2)}_{\in\{-4,0,4\}} + \underbrace{2x_1y_2}_{\in\{-2,2\}} \in \{-6,-2,2,6\}$.
   donc $S(J) \subset \{-6,-2,2,6\}$ et, comme on a aussi $S(J) \subset [\![-4,4]\!]$, on a $S(J) \subset \{-2,2\}$.
   De plus, $2 \in S(J)$ (en prenant $X = (1,1)$ et $Y = (1,1)$), donc $-2 \in S(J)$ (par symétrie).
   On a donc $\boxed{S(J) = \{-2,2\}.}$
   • En choisissant judicieusement C et D, on peut , en effectuant le produit CAD, multiplier les lignes et les colonnes de A par 1 ou -1.
   Par exemple, en prenant $D = \text{diag}(-1,1)$ et $C = \text{diag}(1,-1)$, on multiplie la deuxième ligne de A et la première colonne par -1 en calculant CAD. De plus, ces opérations laissent $S(A)$ inchangé (d'après la question I3).

- Les matrices avec 0, 2 ou 4 « un »s'obtiennent en partant de I et vérifient $S(A) = S(I) = \{-4, 0, 4\}$.

Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(-1, 1) I \operatorname{diag}(-1, 1)$.

- Les matrices avec 1 ou 3 « un »s'obtiennent en partant de J et vérifient $S(A) = S(J) = \{-2, 2\}$.

Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1, -1) J \operatorname{diag}(1, -1)$.

5. (c) $\Rightarrow$ (b) Si A est de rang 1, alors toutes les colonnes de A, notées $C_1, ..., C_n$ sont multiples de $C_1 \neq 0$.

En posant, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $C_i = x_i C_1$, on a $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} C_1 = X^t Y$.

De plus, $Y = C_1 \in \{-1, 1\}^n$ car $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ et comme $x_i = a_{1,i}/a_{1,1} \in \{-1, 1\}$, $X \in \{-1, 1\}^n$.
On a bien (c) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (a) Si $A = X^t Y$ avec $(X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2$, alors

$$ {}^t XAY = {}^t X(X^t Y)Y = ({}^t XX)({}^t YY) = n \times n = n^2 \in S(A). $$

(a) $\Rightarrow$ (c) Si $n^2 \in S(A)$, alors il existe $X = (x_i)$ et $Y = (y_j) \in \{-1, 1\}^n$ tels que

$$ n^2 = {}^t XAY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{i,j} y_j. $$

Or, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $x_i a_{i,j} y_j \in \{-1, 1\}$, donc $n^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{i,j} y_j \Rightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, x_i a_{i,j} y_j = 1$ (somme de n^2 termes, chaque terme valant au plus 1).
Par suite, comme $x_i, a_{i,j}, y_j \in \{-1, 1\}$, on a, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $x_i y_j = a_{i,j}$.

On a donc, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $y_j \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$.

Par suite, toutes les colonnes de A sont multiples de $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, donc A est de rang au plus égal à 1.

Comme de plus $A \neq 0$, $\operatorname{rg}(A) \geq 1$, et on a donc $\operatorname{rg}(A) = 1$.

Cl : On a bien montré l'équivalence des trois propositions.

6. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ vérifiant $n^2 \in S(A)$ est de rang 1, et s'obtient donc
   - en choisissant les coefficients de la première colonne : 2^n choix
   - en choisissant ensuite, pour les colonnes 2 à n, le coefficient (dans $\{-1, 1\}$) multiplicateur permettant de passer de C_1 à C_i : 2 choix à chaque fois.

   Cette construction permet d'obtenir une seule fois chaque matrice A de $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ vérifiant $n^2 \in S(A)$.

   On a donc 2^{2n-1} matrices dans ce cas, donc la proportion est $\dfrac{2^{2n-1}}{2^{n^2}} = \dfrac{1}{2^{n^2-2n+1}} = \dfrac{1}{2^{(n-1)^2}}$.

Partie II

1. U_1 est finie, donc $e^{\lambda U_1}$ admet une espérance et, d'après le théorème de transfert,

$$ E[e^{\lambda U_1}] = e^{-\lambda} P(U_1 = -1) + e^{\lambda} P(U_1 = 1) = \frac{1}{2}(e^{-\lambda} + e^{\lambda}), $$

donc

$$ \varphi(\lambda) = \ln(E[e^{\lambda U_1}]) = -\ln(2) + \ln(e^{-\lambda} + e^{\lambda}). $$

Posons $g : t \mapsto -\ln(2) + \ln(e^{-t} + e^t) - t^2/2$. g est paire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$ g'(t) = \frac{-e^{-t} + e^t}{e^{-t} + e^t} - t = 1 - \frac{2}{1 + e^{2t}} - t \quad \text{et} \quad g''(t) = \frac{4e^{2t}}{(1 + e^{2t})^2} - 1 = -\frac{1 - 2e^{2t} + (e^{2t})^2}{(1 + e^{2t})^2} = -\frac{(1 - e^{2t})^2}{(1 + e^{2t})^2} \leq 0. $$

Par suite, on a :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(t)$		-	0	-	
$g'(t)$		↘	0	↘	
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$		↗	0	↘	

g'(0) = 0

g(0) = 0

Par suite, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $g(\lambda) \leq 0$, donc $\varphi(\lambda) \leq \dfrac{\lambda^2}{2}$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $\lambda > 0$,
$$P(S_k \geq t) = P(e^{\lambda S_k} \geq e^{\lambda t}).$$
Or, $e^{\lambda S_k} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda U_i}$ admet une espérance comme produit de variables indépendantes admettant une espérance et
$$E[e^{\lambda S_k}] = \prod_{i=1}^{k} E[e^{\lambda U_i}] = \prod_{i=1}^{k} e^{\varphi(\lambda)} = e^{k\varphi(\lambda)}.$$
Donc, d'après le lemme de Markov appliqué à $e^{\lambda S_k}$ (variable à valeurs positives admettant une espérance) et $e^{\lambda t} > 0$, on a :
$$P(S_k \geq t) = P(e^{\lambda S_k} \geq e^{\lambda t}) \leq \frac{E[e^{\lambda S_k}]}{e^{\lambda t}} = \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t).$$

3. Pour tout $t > 0$, pour tout $\lambda > 0$,
$$P(S_k \geq t) \leq \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t) \leq \exp(k\frac{\lambda^2}{2} - \lambda t) \quad \text{(d'après II1 et par croissance de l'exponentielle)}$$
En prenant $\lambda = \dfrac{t}{k} > 0$, on obtient :
$$P(S_k \geq t) =\leq \exp\left(k\frac{(t/k)^2}{2} - (t/k)t\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right).$$

4. Comme C suit une loi uniforme et $\text{Card}\,(C(\Omega)) = \text{Card}\,(\mathcal{M}_n(\{-1,1\})) = 2^{n^2}$,
   – pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $P(C = A) = \dfrac{1}{2^{n^2}}$
   – pour toute partie E de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $P(C \in E) = \dfrac{\text{Card}\,(E)}{2^{n^2}}$.
   • Il est clair que chacune des variables $x_i y_j C_{i,j}$ est à valeurs dans $\{-1,1\}$ car $\{-1,1\}$ est stable par produit.
   • Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,
$$P(x_i y_j C_{i,j} = 1) = P(C_{i,j} = x_i y_j).$$
Or, $\{C \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\}) : C_{i,j} = x_i y_j\}$ est de cardinal 2^{n^2-1} (car cela correspond au choix d'un (n^2-1)-uplet d'éléments de $\{-1,1\}$), donc
$$P(x_i y_j C_{i,j} = 1) = \frac{2^{n^2-1}}{2^{n^2}} = 1/2 \quad \text{et} \quad P(x_i y_j C_{i,j} = -1) = 1 - P(x_i y_j C_{i,j} = 1) = 1/2.$$
Ces variables suivent donc bien une loi uniforme sur $\{-1,1\}$.
   • Pour tout $k \in [\![1,n^2]\!]$, pour toute famille $(i_p,j_p)_{1\leq p\leq k} \in ([\![1,n]\!]^2)^k$ formée d'éléments distincts et toute famille $(\alpha_p)_{1\leq p\leq k} \in \{-1,1\}^k$,
$$\prod_{p=1}^{k} P(x_{i_p} y_{j_p} C_{i_p,j_p} = \alpha_p) = \prod_{i=1}^{k} 1/2 = 1/2^k$$
et
$$P\left(\bigcap_{p=1}^{k} (x_{i_p} y_{j_p} C_{i_p,j_p} = \alpha_p)\right) = P\left(\bigcap_{p=1}^{k} (C_{i_p,j_p} = \alpha_p x_{i_p} y_{j_p})\right) = \frac{2^{n^2-k}}{2^{n^2}} = 1/2^k$$
car $\{C \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\}) : \forall p \in [\![1,k]\!], C_{i_p,j_p} = \alpha_p x_{i_p} y_{j_p}\}$ est de cardinal 2^{n^2-k} (car cela correspond au choix des autres éléments de la matrice, soit d'un (n^2-k)-uplet d'éléments de $\{-1,1\}$).
On a bien
$$P\left(\bigcap_{p=1}^{k} (x_{i_p} y_{j_p} C_{i_p,j_p} = \alpha_p)\right) = \prod_{p=1}^{k} P(x_{i_p} y_{j_p} C_{i_p,j_p} = \alpha_p)$$
d'où l'indépendance (mutuelle, celle qui nous a servi à la question II1).

5. • Remarquons déjà que l'inégalité montrée en II3 est encore valable pour $t = 0$, car une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1.
   • Pour tout $t \geq 0$, pour tout $\omega \in \Omega$,
$$M(C(\omega)) \geq tn^{3/2} \Leftrightarrow \exists (X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2 : {}^tXC(\omega)Y \geq tn^{3/2},$$
donc
$$(M(C) \geq tn^{3/2}) = \bigcup_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2} ({}^tXCY \geq tn^{3/2}).$$

Par suite, par sous-additivité d'une probabilité,

$$P(M(C) \geq tn^{3/2}) = P\left(\bigcup_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2} ({}^tXCY \geq tn^{3/2})\right) \leq \sum_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2} P({}^tXCY \geq tn^{3/2}).$$

• Or, pour tout $(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2$ fixé, ${}^tXCY = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}^{n} x_iy_jC_{i,j}$, où les variables $(x_iy_jC_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ sont à valeurs dans $\{-1,1\}$, indépendantes et de loi uniforme.
D'où, d'après l'inégalité de Hoeffding,

$$P({}^tXCY \geq tn^{3/2}) = P\left(\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}^{n} x_iy_jC_{i,j} \geq \underbrace{tn^{3/2}}_{\geq 0}\right) \leq \exp\left(-\frac{(tn^{3/2})^2}{2n^2}\right) = \exp\left(-\frac{t^2n}{2}\right).$$

• En réinjectant ce résultat dans l'inégalité obtenue au deuxième point, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(M(C) \geq tn^{3/2}) &\leq \sum_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2} P({}^tXCY \geq tn^{3/2}) \\
&\leq \sum_{(X,Y)\in(\{-1,1\}^n)^2} \exp\left(-\frac{t^2n}{2}\right) \\
&= 2^{2n}\exp\left(-\frac{t^2n}{2}\right) \quad \text{(somme d'une constante, à } 2^{2n} \text{ termes)} \\
&= \exp\left(2n\ln(2) - \frac{t^2n}{2}\right) = \exp\left(-\left(\frac{t^2}{2} - 2\ln 2\right)n\right).
\end{aligned}$$

6. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
P\left(M(C) > (2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}\right) &\leq P\left(M(C) \geq (2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}\right) \\
&\leq \exp\left(-\left(\frac{(2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)^2}{2} - 2\ln 2\right)n\right) \quad \text{(question II5 avec } t = 2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon \geq 0) \\
&= \exp\left(-\left(2\varepsilon\sqrt{\ln 2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)n\right) < 1 \quad \left(\text{car } -\left(2\varepsilon\sqrt{\ln 2}+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)n < 0\right),
\end{aligned}$$

donc $\quad P(M(C) \leq (2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}) > 0.$

Il existe donc $\omega \in \Omega$ tel que $M(C(\omega)) \leq (2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}$.
Par définition de $\underline{M}(n)$, on a donc $\underline{M}(n) \leq M(C(\omega)) \leq (2\sqrt{\ln 2}+\varepsilon)n^{3/2}$.
Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, en faisant tendre ε vers 0, on obtient donc bien :

$$\boxed{\underline{M}(n) \leq 2\sqrt{\ln 2}n^{3/2}.}$$

Partie III

1. Pour $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ et $Y = (y_i)_{1\leq i\leq n} \in \{-1,1\}^n$ fixés, on a

$${}^tXAY = \sum_{i=1}^{n}(X)_i(AY)_i,$$

donc, pour maximiser ${}^tXAY$, il faut, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, prendre $(X)_i$ du même signe que $(AY)_i$.
Comme $(X)_i$ ne peut prendre comme valeurs que -1 et 1, $(X)_i$ est entièrement déterminé par ce choix de signe.
De plus, pour un tel choix de $X \in \{-1,1\}^n$, on obtient :

$${}^tXAY = \sum_{i=1}^{n}(X)_i(AY)_i = \sum_{i=1}^{n}|(AY)_i| = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}y_j\right|,$$

ce qui prouve l'assertion demandée.

2. Soit $i \in [\![1,n]\!]$ fixé.
• Les coordonnées (Z_j) de Z forment une famille de variables indépendantes suivant une loi uniforme sur $\{-1,1\}$ (même preuve, en plus simple, qu'au II4).
• En notant B_n le nombre de variables Z_j vérifiant $a_{i,j}Z_j = -1 \Leftrightarrow Z_j = a_{i,j}$.

Comme ces événements sont indépendants et ont la même probabilité 1/2 de se réaliser, $B_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$.

- De plus,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} Z_j = n - 2B_n (\text{en adaptant un résultat obtenu en I2 sur la parité}).$$

- Comme B_n est finie, $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} Z_j\right| = |n - 2B_n|$ admet une espérance et, d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} Z_j\right|\right] &= E[|n - 2B_n|] = \sum_{k=0}^{n} |n-2k| P(B_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} |n-2k| \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |n-2k|.
\end{aligned}$$

Enfin, $g_A(Z) = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} Z_j\right|$ admet une espérance comme somme finie de variables admettant une espérance et, par linéarité de l'espérance,

$$E[g_A(Z)] = \sum_{i=1}^{n} E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} Z_j\right|\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |n-2k|\right) = \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |n-2k|.$$

3. (a) Montrons par récurrence que, pour $m \in \{0, \cdots, n-1\}$, on a $\sum_{k=0}^{m} (n-2k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{m}$ (HR_m).

Initialisation : Pour $m = 0$,

$$\sum_{k=0}^{m} (n-2k) \binom{n}{k} = (n-0) \binom{n}{0} = n \quad \text{et} \quad n \binom{n-1}{m} = n \binom{n-1}{0} = n,$$

donc on a bien HR_0.

Hérédité : Soit $m \in \{0, \cdots, n-2\}$ et supposons HR_m vérifiée.

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} (n-2k) \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{m} (n-2k) \binom{n}{k} + (n - 2(m+1)) \binom{n}{m+1} \\
&= n \binom{n-1}{m} + (n-2m-2) \binom{n}{m+1} \quad (\text{d'après } HR_m) \\
&= n \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} + (n-2m-2) \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} \\
&= (m+1) \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} + (n-2m-2) \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} \\
&= (n-m-1) \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} = n \frac{(n-1)!}{(m+1)!(n-m-2)!} = n \binom{n-1}{m+1}. \quad \text{On a bien } HR_{m+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $m \in \{0, \cdots, n-1\}$, $\sum_{k=0}^{m} (n-2k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{m}$.

(b) Séparons les cas n pair et n impair.

- Si n est pair, alors il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2a$. Alors $\lfloor n/2 \rfloor = a$ et

$$\begin{aligned}
E[g_A(Z)] &= \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k| = \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{a}\binom{n}{k}|n-2k| + \frac{n}{2^n}\sum_{k=a+1}^{n}\binom{n}{k}|n-2k| \\
&= \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{a}\binom{n}{k}(n-2k) + \frac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{n-a-1}\binom{n}{n-j}|2j-n| \quad \text{(en posant } j = n-k \Leftrightarrow k = n-j\text{)} \\
&= \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{a}\binom{n}{k}(n-2k) + \frac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{a-1}\binom{n}{j}(n-2j) \quad \text{(car si } j \le a-1,\ 2j-n \le 0\text{)} \\
&= \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{a}\binom{n}{k}(n-2k) + \frac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{a}\binom{n}{j}(n-2j) \quad \text{(car } n-2a = 0\text{)} \\
&= 2\frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{a}\binom{n}{k}(n-2k) = \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{a} \quad \text{(question III3a avec } a = \lfloor n/2 \rfloor \in \{0,\cdots n-1\}\text{).} \\
&= \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}
\end{aligned}$$

- Si n est impair, alors il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2a+1$. Alors $\lfloor n/2 \rfloor = a$ et

$$\begin{aligned}
E[g_A(Z)] &= \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k| = \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{a}\binom{n}{k}|n-2k| + \frac{n}{2^n}\sum_{k=a+1}^{n}\binom{n}{k}|n-2k| \\
&= \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{a}\binom{n}{k}(n-2k) + \frac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{n-a-1}\binom{n}{n-j}|2j-n| \quad \text{(en posant } j = n-k \Leftrightarrow k = n-j\text{)} \\
&= \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{a}\binom{n}{k}(n-2k) + \frac{n}{2^n}\sum_{j=0}^{a}\binom{n}{j}(n-2j) \quad \text{(car si } j \le a,\ 2j-n \le 0\text{)} \\
&= 2\frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{a}\binom{n}{k}(n-2k) = \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{a} \quad \text{(question III3a avec } a = \lfloor n/2 \rfloor \in \{0,\cdots n-1\}\text{).} \\
&= \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}
\end{aligned}$$

- On a donc bien toujours :

$$\boxed{E[g_A(Z)] = \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.}$$

4. - Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $M(A) = \max\{g_A(Y),\ Y \in \{-1,1\}^n\}$.
   - S'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ telle que $M(A) < \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, alors pour tout $Y \in \{-1,1\}^n$, $g_A(Y) < \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, donc pour tout $\omega \in \Omega$, $g_A(Z(\omega)) < \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, donc $E[g_A(Z)] < \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, ce qui est exclu.
   - Par suite, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, $M(A) \ge \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, donc

$$\underline{M}(n) = \min\{M(A), A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})\} \ge \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

5. - Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors $\lfloor n/2 \rfloor = k$ et

$$\begin{aligned}
\frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} &= \frac{(2k)^2}{2^{2k-1}}\frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} \sim \frac{2^2k^2}{2^{2k-1}}\frac{\sqrt{2\pi(2k-1)}\left(\frac{2k-1}{e}\right)^{2k-1}}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k\sqrt{2\pi(k-1)}\left(\frac{k-1}{e}\right)^{k-1}} \\
&= \frac{2^2k^2}{2^{2k-1}}\sqrt{\frac{2k-1}{2\pi k(k-1)}}\frac{2^{2k-1}k^{2k-1}}{k^kk^{k-1}}\frac{\left(1-\frac{1}{2k-1}\right)^{2k-}}{\left(1-\frac{1}{k-1}\right)^k}\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)}{\left(1-\frac{1}{2k}\right)} \\
&\sim 2^2k^2\frac{1}{\sqrt{\pi k}}\frac{e}{e} = \frac{4}{\pi}k^{3/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}n^{3/2}.
\end{aligned}$$

• Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $\lfloor n/2 \rfloor = k$ et

$$\frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \frac{(2k+1)^2}{2^{2k}}\frac{(2k)!}{k!k!} \sim \frac{2^2k^2}{2^{2k}}\frac{\sqrt{2\pi(2k)}\left(\dfrac{2k}{e}\right)^{2k}}{\sqrt{2\pi k}\left(\dfrac{k}{e}\right)^k\sqrt{2\pi k}\left(\dfrac{k}{e}\right)^k}$$
$$= \frac{2^2k^2}{2^{2k}}\sqrt{\frac{2k}{2\pi k^2}}\frac{2^{2k}k^{2k}}{k^k k^k} = 2^2k^2\frac{1}{\sqrt{\pi k}} = \frac{4}{\pi}k^{3/2} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}n^{3/2}.$$

• Dans tous les cas, on a

$$\boxed{\frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}n^{3/2}.}$$

• L'équivalent de ce minorant de $\underline{M}(n)$ est (heureusement) inférieur au majorant trouvé dans la partie II. On trouve en gros un facteur 2 entre ces deux quantités.

Partie IV

1. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge et vaut $n!$ (HR_n).
Initialisation : $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ converge et vaut $1 = 0!$ d'après le cours. On a bien HR_0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons HR_n vérifiée.
Alors, soit $A > 0$ et posons $u(x) = x^{n+1}$, $u'(x) = (n+1)x^n$, $v'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = -e^{-x}$.
Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$, on peut intégrer par parties et on a :

$$\int_0^A x^{n+1}e^{-x}dx = [-x^{n+1}e^{-x}]_0^A + (n+1)\int_0^A x^n e^{-x}dx$$
$$= -\underbrace{A^{n+1}e^{-A}}_{\to 0 \text{ par CC}} + \underbrace{0}_{\text{car } n+1>0} + (n+1)\underbrace{\int_0^A x^n e^{-x}dx}_{\to I_n = n! \text{ car } I_n \text{ converge}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} (n+1).n! = (n+1)!,$$

donc I_{n+1} converge et vaut $(n+1)!$. On a bien HR_{n+1}.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge et vaut $n!$

2. Posons le changement de variable affine $x = n + t\sqrt{n} \Leftrightarrow t = \dfrac{x-n}{\sqrt{n}}$. On a $dx = \sqrt{n}dt$.
Comme $\sqrt{n} > 0$, ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant, et induit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\sqrt{n}, +\infty[)$. De plus, I_n converge, donc on a :

$$I_n = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}(n+t\sqrt{n})^n e^{-n-t\sqrt{n}}\sqrt{n}dt = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} n^n\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-n}e^{-t\sqrt{n}}\sqrt{n}dt = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-t\sqrt{n}}dt.$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, posons $g_x : t \mapsto f(x,t)$ définie sur $D_{g_x} = \{t \in \mathbb{R} : (t,x) \in U\}$.
g_x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_{g_x} par opérations sur les fonctions usuelles et, pour tout $t \in D_{g_x}$,

$$g_x'(t) = 2t\ln\left(1+\frac{x}{t}\right) + t^2\frac{-\dfrac{x}{t^2}}{1+\dfrac{x}{t}} - x = t\left[2\ln\left(1+\frac{x}{t}\right) - \frac{\dfrac{x}{t}}{1+\dfrac{x}{t}} - \frac{x}{t}\right] = t\left[2\ln\left(1+\frac{x}{t}\right) - 1 + \frac{1}{1+\dfrac{x}{t}} - \frac{x}{t}\right] = tF\left(\frac{x}{t}\right)$$

où $F : z \in]-1, +\infty[\mapsto 2\ln(1+z) - 1 + \dfrac{1}{1+z} - z$.
F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et, pour tout $z > -1$,

$$F'(z) = \frac{2}{1+z} - 1 - \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{2(1+z) - (1+z)^2 - 1}{(1+z)^2} = -\frac{z^2}{(1+z)^2},$$

donc :

z	-1		0		$+\infty$
$F'(z)$		-	0	-	
$F(z)$		$\searrow$	0	$\searrow$	
$F(z)$		$+$	0	-	

(a) • Si $x=0$, $f(t,x)=0\leq -\dfrac{x^2}{2}$.

• Si $x<0$, $(t,x)\in U \Leftrightarrow (t>0 \text{ et } t>-x) \Leftrightarrow t>-x>0$, donc $(t,x)\in U \Rightarrow \dfrac{x}{t}\in]-1,0[$, donc $F\left(\dfrac{x}{t}\right)>0$.

Par suite, comme t est aussi positif, $g_x'(t)=tF\left(\dfrac{x}{t}\right)>0$, donc g_x est croissante sur D_{g_x}.

Enfin, quand $t\to+\infty$, $x/t\to 0$, donc

$$g_x(t)=t^2\ln(1+\frac{x}{t})-tx=t^2\left(\frac{x}{t}-\frac{x^2}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)-tx=-\frac{x^2}{2}+o(1)\underset{t\to+\infty}{\to}-\frac{x^2}{2},$$

Donc, comme g_x est croissante sur $D_{g_x}=]-x,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}g_x(t)=-\dfrac{x^2}{2}$, on a :

$$\forall t\in D_{g_x},\quad f(t,x)=g_x(t)\leq-\frac{x^2}{2},$$

et donc, pour tout $(x,t)\in U$,

$$x<0\quad\Rightarrow\quad f(t,x)\leq-\frac{x^2}{2}.$$

(b) Si $x>0$, $(t,x)\in U\Leftrightarrow t>0$, donc $\dfrac{x}{t}>0$, donc $(t,x)\in U\Rightarrow F\left(\dfrac{x}{t}\right)<0$.

Par suite, comme t est positif, $g_x'(t)=tF\left(\dfrac{x}{t}\right)<0$, donc g_x est décroissante sur $D_{g_x}=\mathbb{R}_+^*$, donc

$$\forall t\geq 1, g_x(t)\leq g_x(1)\quad\text{ie}\quad f(t,x)\leq f(1,x).$$

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons

$$f_n : x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\leq-\sqrt{n}\\ \left(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}} & \text{si } x>-\sqrt{n}\end{cases}.$$

• Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $x>-\sqrt{N}$ et, pour tout $n\geq N$, $x>-\sqrt{n}$, donc

$$\begin{aligned}f_n(x)&=\exp\left(n\ln(1+\frac{x}{\sqrt{n}})-\sqrt{n}x\right)=\exp\left(n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}-\frac{x^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\sqrt{n}x\right)\\&=\exp\left(-\frac{x^2}{2}+o(1)\right)\underset{n\to+\infty}{\to}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),\end{aligned}$$

donc (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x\mapsto\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ qui est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$.

• Soit $n\geq 1$.

Pour tout $x\leq-\sqrt{n}$, $|f_n(x)|=0\leq\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

Pour tout $x\in]-\sqrt{n},0]$,

$$|f_n(x)|=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-x\sqrt{n}\right)=\exp\left(f(\sqrt{n},x)\right).$$

donc, si $-\sqrt{n}<x\leq 0$, $|f_n(x)|\leq exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ (d'après la question IV3a avec $(\sqrt{n},x)\in U$)

Pour tout $x>0$, comme $\sqrt{n}\geq 1$, $|f_n(x)|\leq exp\left(f(1,x)\right)=(1+x)e^{-x}=e^{-x}+xe^{-x}$ (d'après la question IV3b avec $(\sqrt{n},x)\in U$)

Donc, finalement,

$$\forall n\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R},\quad |f_n(x)|\leq\varphi(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x\leq 0\\ e^{-x}+xe^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

où φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car positive et

$$\int_{-\infty}^0\varphi(x)dx\text{converge (intégrale de Gauss)}\quad\text{et}\quad\int_0^{+\infty}\varphi(x)dx=I_0+I_1\text{ converge.}$$

• D'où, par convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-x\sqrt{n}}dx=\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=\sqrt{2\pi}\neq 0,$$

donc

$$I_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}\sqrt{2\pi}=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.\quad\text{cqfd}$$

Partie V

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ et $Y \in \{-1,1\}^n$. Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(AY)_i \in [\![-n,n]\!]$.
   Construisons alors récursivement une suite $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ainsi :
   – $x_1 = 1$
   – pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, si $\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} x_k (AY)_k \leq 0$, alors on pose $x_i = 1$, sinon, on pose $x_i = -1$.
   Ainsi construite, il est clair que $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{-1,1\}^n$ et on peut montrer facilement par récurrence que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{i} x_k (AY)_k \in [\![-n,n]\!]$.
   Pour ce choix de X, on a alors
   $$|{}^t XAY| = \left| \sum_{k=1}^{n} x_k (AY)_k \right| \leq n,$$
   ce qui assure que $\min\{|{}^t XAY| \mid X \in \{-1,1\}^n\} \leq n$.
   Toujours pour ce choix de X, ${}^t XAY \in S(A)$, donc, comme cet ensemble est symétrique, $\{\pm {}^t XAY\} \subset S(A)$.
   D'où, comme ${}^t XAY \in [\![-n,n]\!]$, $S(A) \cap [\![0,n]\!] \neq \emptyset$, donc $m(A) \leq n$.
2. En cherchant rapidement, je n'ai rien vu de simple, et comme mes élèves s'arrêteront certainement avant ce dernier point, je laisse courir pour le moment...
   Cependant, je suis preneur d'une idée !