**CORRIGÉ CENTRALE - MATHEMATIQUES 1.**

# I Premième partie.

**I.A -** Si $F = \mathrm{Vect(u)}$ est stable par $f$, $f(u) \in \mathrm{Vect(u)}$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Puisque $F$ est une droite vectorielle engendré par $u$, u est non nul donc $u$ est bien un vecteur propre de $f$. Réciproquement si $u$ est un vecteur propre de $f$ associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. $u \neq 0_E$ donc Vect(u) est une droite vectorielle. De plus, si $v \in \mathrm{Vect(u)}$, il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $v = ku$. Par suite, $f(v) = \lambda k u$ donc $f(v) \in \mathrm{Vect(u)}$. Vect(u) est donc stable par $f$.

**I.B -**

**I.B.1)** Les sous-espaces $\{0_E\}$ et $E$ sont clairement stables par $F$, il y a donc au moins deux sous-espaces stables par $F$.

Considérons l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $F$ est un sous-espace vectoriel stable autre que $\{0_E\}$ et $E$ alors $\dim(F) = 1$. D'après I.A, $f$ admet alors un vecteur propre associé à une valeur propre réelle.

Le polynôme caractéristique de $f$ est $X^2 + 1$. Celui-ci n'a pas de racines réelles, $f$ n'admet donc pas de valeurs propres réelles puisqu'elles sont racines du polynôme caractéristique.

$\boxed{f \text{ n'a donc que } \{0_E\} \text{ et } E \text{ comme sous-espaces propres stables.}}$

**I.B.2)** Ici $n \geq 2$. Si $f$ est non nul, $\mathrm{Ker}\,(f) \neq E$ et si $f$ est non injective $f \neq \{0_E\}$. De plus, $f(\mathrm{Ker}\,(f)) = \{0_E\}$ donc $\mathrm{Ker}\,(f)$ est stable par $f$. Ainsi $f$ admet au moins trois sous-espaces stables, $\boxed{\{0_E\},\ E \text{ et } \mathrm{Ker}\,(f).}$

Remarque : $n \geq 2$ est nécessaire car sinon on a $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$ ou $\mathrm{Ker}\,(f) = E$.

Supposons de plus $n$ impair. On a $f(\mathrm{Im}\,(f)) = \{f(f(u))\,;\, u \in E\} \subset \mathrm{Im}\,(f)$, $\mathrm{Im}\,(f)$ est donc stable par $f$. Comme $f$ est non injective, $f$ étant un endomorphisme sur un espace de dimension finie $f$ est non surjective donc $\mathrm{Im}\,(f) \neq E$. $f$ est non nul donc $\mathrm{Im}\,(f) \neq \{0_E\}$. D'après le théorème du rang $n = rg(f) + \dim(\mathrm{Ker}\,(f))$. Par suite, si $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f)$ on a $n = 2rg(f)$ et donc $n$ est pair. Ce n'est pas le cas donc $\mathrm{Im}\,(f) \neq \mathrm{Ker}\,(f)$. Ainsi,

$\boxed{\mathrm{Im}\,(f) \text{ est un quatrième sous-espace propre qui s'ajoute au trois autres.}}$

Considérons l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative dans la base canonique $(e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$f$ est non nul, non injective car $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect(e_1)}$ donc $f$ admet au moins trois sous-espaces stables. Supposons que $F$ soit un autre sous-espace stable par $f$. On a alors $\dim(F) = 1$ et de I.A. $F$ est engendré par un vecteur propre de $f$. Le polynôme caractéristique de $f$ est $X^2$. $f$ admet donc comme seule valeur propre 0 donc $F = \mathrm{Ker}\,(f)$.

$\boxed{\text{Il n'y a donc que trois sous-espaces stables par } f.}$

**I.C -**

**I.C.1)** Soient $(u_1, u_2, \cdots, u_k)$ une famille de $k$ vecteurs propres de $f$ associés respectivement à des valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ et $F = \mathrm{Vect(u_1, u_2, \cdots, u_k)}$

Soit $u \in F$. Il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$. On a alors $f(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i u_i$ donc $f(u) \in F$. Ainsi $\boxed{F \text{ est stable par } f.}$

L'endomorphisme induit par $f$ sur un sous-espace propre $F$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ est $\boxed{\lambda Id_F.}$

**I.C.2)** Soit $F$ un sous-espace stable de $f$ de dimension au moins 2. Soit $(u, v)$ une famille libre de $F$. On vérifie alors que pour tout $(a, b) \in (K^*)^2$ avec $a \neq b$, la famille $(u + av, u + bv)$ est libre. La famille $(\mathrm{Vect(u+av)})_{\mathrm{a} \in \mathbb{K}^*}$ est donc une famille de droites vectorielles deux à deux distinctes, il y en a donc une infinité. De plus, $u$ est $v$ sont des vecteurs propres donc, d'après I.C.1) Vect(u+av) est stable par $f$ pour tout $a \in \mathbb{K}^*$. Ainsi, $\boxed{f \text{ admet une infinité de droites vectorielles stables par } f.}$

**I.C.3)** Si tout sous-espace vectoriel de $f$ est stable par $f$ toute droite vectorielle l'est aussi et donc tout vecteur de $E$ est vecteur propre de $f$. Montrons que $f$ admet une seule valeur propre.
Soit, pour tout $u \in E$, $\lambda_u \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda_u u$. Soit $(u, v) \in E^2$.
Supposons $(u, v)$ libre. On a $f(u+v) = \lambda_{u+v}(u+v) = \lambda_u u + \lambda_v v$ donc $(\lambda_{u+v} - \lambda_u)u + (\lambda_{u+v} - \lambda_v)v = 0_E$. La liberté de $(u, v)$ impose $\lambda_{u+v} = \lambda_u = \lambda_v$.
Supposons $(u, v)$ liée. Si $u = 0_E$, on a $f(u) = \lambda_v 0_E$ et on peut convenir que $\lambda_u = \lambda_v$. On peut conclure la même chose si $v = 0_E$.
Si $u \neq 0_E$ et $v \neq 0_E$, il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $v = \alpha u$. Par suite, $f(v) = \alpha f(u) = \alpha \lambda_u u$ et $f(v) = \lambda_v v = \alpha \lambda_v u$. Comme $u \neq 0_E$, $\alpha \lambda_u = \alpha \lambda_v$ et comme $\alpha \neq 0$, $\lambda_u = \lambda_v$.
Ainsi, $f$ n'admet qu'une seule valeur propre et comme tout vecteur de $E$ est vecteur propre $\boxed{f \text{ est une homothétie vectorielle de rapport cette valeur propre.}}$

**I.D -**

**I.D.1)** Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une base de vecteurs propres de $f$. Cette famille existe puisque $f$ est diagonalisable. Soit $F$ un sous-espace stable par $f$. Si $F = \{0_E\}$ ou $F = E$, on a immédiatement des sous espaces stables par $f$ et supplémentaire de $F$ à savoir respectivement $E$ et $\{0_E\}$. Supposons $F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$.
Comme $f$ est diagonalisable, l'endomorphisme $f_{|F}$ induit par $f$ sur $F$ est aussi diagonalisable. Soit $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ une base de vecteurs propres de $F$ pour $f_{|F}$, $k$ étant donc la dimension de $F$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut adjoindre des vecteurs de $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ à $(v_1, v_2, \cdots, v_k)$ de sorte à obtenir une base de $E$. Soit $(u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_{n-k}})$ une telle famille de vecteurs. Par suite, $\mathrm{Vect}((\mathrm{u}_{\mathrm{i}_1}, \cdots, \mathrm{u}_{\mathrm{i}_2}, \cdots, \mathrm{u}_{\mathrm{i}_{\mathrm{n-k}}}))$ est un supplémentaire de $F$ et d'après I.C.1) est stable par $f$.

**I.D.2)** Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. D'après le théorème de De d'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique de $f$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$ donc $f$ admet au moins un vecteur propre. Soit $F$ la somme directe des sous-espaces propres de $f$. $F \neq \{0_E\}$ d'après ce qui précède.
Supposons $F \neq E$. $F$ admet un supplémentaire $G$ stable par $G$ et $G \neq \{0_E\}$ car $F \neq E$. L'endomorphisme $f_{|G}$ a aussi un polynôme caractéristique scindé dans $\mathbb{C}$ et donc un vecteur propre $u$. $u$ est alors immédiatement vecteur propre de $f$ et est donc dans $F$. Or, $F$ et $G$ sont supplémentaires donc $u = 0_E$ ce qui est contradictoire avec $u$ vecteur propre. Ainsi $F = E$ et donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

$\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \text{ on ne peut pas conclure que } f \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}}$. Prenons par exemple l'endomorphisme de la question I.B.1) pour lequel les seuls sous-espaces stables sont $\{0_E\}$ et $E$ et donc tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable et cet endomorphisme n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

# II Deuxième partie.

**II.A -)**

**II.A.1)** Soit $u \in F$. Il existe $(u_i)_{i \in \{1, \cdots, p\}} \in \displaystyle\prod_{i=1}^{p} F \cap E_i$ tel que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i$.

Par suite, $f(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$. Comme, pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, $F$ et $E_i$ sont des sous-espaces vectoriels $F \cap E_i$ l'est aussi et donc $\lambda_i u_i \in F \cap E_i$.

Ainsi $f(u) \in \bigoplus_{i=1}^{p} F \cap E_i$. $\boxed{F = \bigoplus_{i=1}^{p} F \cap E_i \text{ est donc stable par } f.}$

**II.A.2)** Les valeurs propres $(\lambda_i)_{i\in\{1,\cdots,p\}}$ dont deux à deux distinctes donc les sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in\{1,\cdots,p\}}$ sont en somme directe. De plus, $f$ est diagonalisable donc $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Par conséquent, $\boxed{\text{il existe } (x_i)_{1\le i\le p} \in \prod_{i=1}^{p} E_i \text{ unique tel que } x = \sum_{i=1}^{p} x_i.}$

**II.A.3)** $(x_1, \cdots, x_r)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes donc c'est une famille libre. De plus, $(x_1, \cdots, x_r)$ est immédiatement une famille génératrice de $\mathrm{Vect(x_1, \cdots, x_r)}$ donc $\boxed{(x_1, \cdots, x_r) \text{ est une base de } V_x.}$

**II.A.4)** On a, pour tout $j \in \{1, \cdots, r\}$, $f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{j-1} x_i \in V_x$. La matrice de $(f^{j-1}(x))_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ dans la base $\mathcal{B}_x$ est $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \lambda_r^2 & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}}$.

**II.A.5)** Le déterminant de la matrice de $(f^{j-1}(x))_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ dans la base $\mathcal{B}_x$ est un déterminant de Vendermonde qui vaut : $\prod_{1\le i<j\le n} (\lambda_j - \lambda_i)$. Comme $(\lambda_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ est une famille de scalaires deux à deux distincts, ce déterminant est non nul. Par suite, la famille $(f^{j-1}(x))_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ est libre et étant de cardinal à égal à $r$, dimension de $V_x$, $\boxed{\text{c'est une base de } V_x.}$

**II.A.6)** Soit $i \in [\![1,p]\!]$. D'après II.A.5) il existe $(\alpha_{i,j})_{j\in\{1,\cdots,r\}}$ tel que $x_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{i,j} f^{j-1}(x)$. Comme $F$ est stable par $f$, $F$ est de façon immédiate stable par $f^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $x \in F$, on a donc $f^{j-1}(x) \in F$ pour tout $j \in \{1, \cdots, r\}$. Par suite, $\sum_{j=1}^{r} \alpha_{i,j} f^{j-1}(x) \in F$ et donc $\boxed{x_i \in F, \text{ ceci pour tout } i \in \{1, \cdots, p\}.}$. On a donc $x \in \bigoplus_{i=1}^{p} F\cap E_i$, ceci étant aussi immédiatement vrai pour $0_E$, on déduit que $F \subset \bigoplus_{i=1}^{p} F\cap E_i$ puis par double inclusion immédiate on a $\boxed{F = \bigoplus_{i=1}^{p} F \cap E_i}$

**II.B -)**

**II.B.1)** Soit $i \in \{1, \cdots, p\}$. Comme $p = n$ et que $(\lambda_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ sont deux à deux distincts, $\lambda_i$ est une valeur propre d'ordre de multiplicité un. Par suite, $\boxed{\dim(E_i) = 1.}$

**II.B.2)** D'après II.B.1), pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $E_i$ est engendré par un vecteur propre et donc d'après I.A $E_i$ est stable par $f$. De plus, si $D$ est une droite vectorielle stable par $f$, elle est engendrée par un vecteur propre d'après encore I.A et est donc l'un des sous-espaces propres $E_i$ puisque pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\dim(E_i) = \dim(D) = 1$. Par conséquent, $E_1, E_2, \cdots, E_n$ sont les seules droite vectorielles stables par $f$. $\boxed{\text{Il y en a donc } n.}$

**II.B.3)** Montrons que $F$ est stable par $f$ et $\dim(F) = k$ si et seulement si il existe $H \subset \{1, \cdots, n\}$ avec $\mathrm{card(H) = k}$ tel que $F = \bigoplus_{i\in H} E_i$.

Soit $H \subset \{1, \cdots, n\}$ avec $card(H) = k$. Soit, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, un vecteur propre $u_i \in E$

tel que $E_i = \mathrm{Vect}(\mathrm{u_i})$. On a donc $\bigoplus_{i\in H} E_i = \mathrm{Vect}((\mathrm{u_i})_{\mathrm{i\in H}})$. D'après I.C-1), $\mathrm{Vect}((\mathrm{u_i})_{\mathrm{i\in H}})$ est stable par $f$ donc $\bigoplus_{i\in H} E_i$ l'est aussi.

Soit $F$ un sous-espace de dimension $k$ et stable par $f$. D'après II.A.6), $F = F \subset \bigoplus_{i=1}^{p} F \cap E_i$.. Soit $i \in \{1, \cdots, n\}$. Comme $\dim(E_i) = 1$, on a ou bien $F \cap E_i = E_i$ ou bien $F \cap E_i = \{0_E\}$. Soit $H = \{i \in [\![1, n]\!]\,;\, F \cap E_i = E_i\}$. On a donc $F = \bigoplus_{i\in H} E_i$. De plus, $\dim(F) = \dim(\bigoplus_{i\in H} E_i) = \sum_{i\in H} \dim(E_i) = card(H)$, donc $card(H) = k$. $F$ est donc stable par $f$ et $\dim(F) = k$ si et seulement si il existe $H \subset \{1, \cdots, n\}$ avec $card(H) = k$ tel que $F = \bigoplus_{i\in H} E_i$.

On déduit que le nombre de sous-espaces stables par $f$ et de dimension $k$ est le nombre de $k$-combinaisons de $\{1, \ldots, n\}$ c'est-à-dire, $\boxed{\binom{n}{k}.}$

**II.B.4)** Si $n = 2$, d'après II.B.2), $\boxed{\text{Les sous-espaces stables sont } \{0_E\},\ E,\ E_1 \text{ et } E_2.}$

Si $n \geq 3$, d'après II.B.2) et II.B.3), il y a $1 + \binom{n}{1} + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} + 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \boxed{2^n}$, cette formule étant d'ailleurs valable pour $n = 2$ et $n = 1$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les sous-espaces stables de } f \text{ sont } \{0_E\},\ E_i,\ i \in [\![1, n]\!] \text{ et } \bigoplus_{i\in H} E_i, \text{ avec } H \subset \{1, \cdots, n\} \\ 2 \leq \mathrm{card(H)} \leq \mathrm{n} - 1.\end{array}}$$

# III Troisième partie.

**III.A -)**

**III.A.1)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Si $deg(P) \leq 0$, $P' = 0$ et donc $D(P) \in \mathbb{K}_n[X]$. Si $deg(P) \geq 1$, $de(P') = deg(P) - 1$ donc $D(P) \in \mathbb{K}_n[X]$. $\boxed{\mathbb{K}_n[X] \text{ est donc stable par } D.}$

On a $\boxed{A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$.

**III.A.2)**

a) Soit $L = \{p \in \mathbb{N}\,;\, \exists P \in F \,\text{avec}\, deg(P) = p\}$. Cet ensemble est non vide vu que $F$ est de dimension non nulle, il contient un polynôme non nul dont le degré est dans $L$. Supposons $L$ non majorée.
En ce cas, il existe une suite $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de polynômes tous non nuls de $F$ et de degré strictement croissant. Cette famille est donc de degré echelonné donc est libre. Ce qui impose $F$ de dimension infinie. Or, $\dim(F)$ est finie, donc $L$ est majorée. $L \subset \mathbb{N}$ donc $L$ admet un plus grand élément. Soit $n$ celui-ci. Par suite, $\boxed{\text{il existe } R \in F \text{ tel que } deg(R) = n.}$ De plus, pour tout $P \in F$, $deg(P) \leq n$ donc $\boxed{F \subset \mathbb{K}_n[X].}$.
Remarquons que $n \neq 0$ car $F$ possède des polynômes non nuls.

b) Pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, on montre par récurrence que $deg(D^i(R)) = n - i$. Or, pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, $0 \leq n - i \leq n$. Par suite, $(D^i(R))_{0\leq i\leq n}$ est une famille de polynômes tous non nuls et de degré échelonné donc $\boxed{(D^i(R))_{0\leq i\leq n} \text{ est libre.}}$

c) La famille $(D^i(R))_{0\leq i\leq n}$ est libre d'après la question précédente. Elle possède $n+1$ éléments qui sont tous dans $\mathbb{K}_n[X]$ et $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$ donc c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ donc $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(\mathrm{D^i(R)})_{0\leq i\leq n})$. Par suite, $\mathbb{K}_n[X] \subset F$. De l'inclusion de III.A.1.a), on a $\boxed{F = \mathbb{K}_n[X]}$.

**III.A.3)** D'après III.A.1) et III.A.2) $F$ est un sous-espace de dimension finie stable par $D$ si et seulement si $F = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ ou bien il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F = \mathbb{K}_n[X]$. Soit à présent $F$ un sous espace stable par $D$ de dimension infinie. Montrons que $D = \mathbb{K}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $P$ est nul, $P \in D$. Supposons $P$ non nul. Comme $F$ est de dimension infinie il existe $Q \in F$ avec $deg(Q) > deq(P)$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $F \subset K_p[X]$, où $p = deg(P)$ et $F$ serait de dimension finie. Soit $q = deg(Q)$. Comme $F$ et $\mathbb{K}_q[X]$ sont stables, $F \cap \mathbb{K}_q[X]$ l'est aussi. De plus, $\mathbb{K}_q[X] \cap F$ est de dimension finie donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{K}_q[X] \cap F = \mathbb{K}_r[X]$. On a donc $\mathbb{K}_r[X] \subset \mathbb{K}_q[X]$ donc $r \leq q$. De plus, $Q \in \mathbb{K}_q[X] \cap F$ donc $Q \in \mathbb{K}_r[X]$ donc $q \leq r$. Ainsi $r = q$ donc $\mathbb{K}_q[X] \cap F = \mathbb{K}_q[X]$. Or, $deq(P) < deq(Q)$ donc $P \in \mathbb{K}_q[X]$ donc $P \in F$. Ainsi $\mathbb{K}[X] \subset F$ et par double inclusion immédiate, $F = \mathbb{K}[X]$.

$\boxed{\text{Les sous espaces stables de } \mathbb{K}[X] \text{ par } D \text{ sont donc les sous-espaces } 0_{\mathbb{K}[X]},\ \mathbb{K}_n[X],\ n \in \mathbb{N} \text{ et } \mathbb{K}[X].}$

**III.B. -**

**III.B.1)** Soit $M = \{u \in E\,;\, \mathcal{B}_{f,u} \text{ est un base de } E\}$. Montrons que $M = E\backslash \mathrm{Ker}\,(f^{n-1})$.

Si $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de $E$, $f^{n-1}(u) \neq 0_E$ donc $u \in E\backslash\mathrm{Ker}\,(f^{n-1})$. L'inclusion $M \subset E\backslash\mathrm{Ker}\,(f^{n-1})$ s'en déduit. Soit $u \in E\backslash\mathrm{Ker}\,(f^{n-1})$. Montrons que $\mathcal{B}_{f,u}$ est libre.

Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i f^{n-i}(u) = 0_E$. Supposons $a_1, \cdots, a_n$ non tous nuls. Soit alors $i_0 = max\{i \in [\![1, n]\!]\,;\, a_i \neq 0\}$. On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{i_0} a_i f^{n-i}(u) = 0_E$. Comme $f^n = 0$, $f^k = 0$ pour tout $k \geq n$, en composant par $f^{i_0-1}$ à chaque membre de l'égalité précédente, on obtient donc $a_{i_0} f^{n-1}(u) = 0_E$. Comme $f^{n-1}(u) \neq 0_E$, $a_{i_0} = 0$ ce qui contredit $a_{i_0} \neq 0$. Par suite, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $a_i = 0$ et donc $\mathcal{B}_{f,u}$ est libre. Il s'agit d'une famille de $n$ vecteurs et comme $\dim(E) = n$, $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de $E$. Ainsi $E\backslash\mathrm{Ker}\,(f^{n-1}) \subset M$ et par double inclusion $\boxed{M = E\backslash\mathrm{Ker}\,(f^{n-1}).}$

**III.B.2)** La matrice de $f$ dans $\mathcal{B}_{f,u}$ est : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$.

**III.B.3)** Soit $u \in E$ tel que $\mathcal{B}_{f,u}$ soit une base de $E$.

Soit $\boxed{\mathcal{B}'_{f,u} = ((i-1)!f^{n-i}(u))_{1\leq i\leq n}.}$ $\mathcal{B}'_{f,u}$ est alors clairement aussi une base de $E$. De plus, pour tout $i \in \{2, \cdots, n\}$, $f((i-1)!f^{n-i}(u)) = (i-1)\left(((i-1)-1)!f^{n-(i-1)}(u)\right)$ et pour $i = 1$, $f((i-1)!f^{n-i}(u)) = 0_E$. Par conséquent, $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans } \mathcal{B}'_{f,u} \text{ est bien } A_{n-1}.}$

**III.B.4)** Soit $u \in E$ tel que $\mathcal{B}_{f,u}$ soit une base de $E$. D'après III.B.3), $f$ et $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}$ ont la même matrice représentative dans respectivement les bases $(X^{i-1})_{1\leq i\leq n}$ et $\mathcal{B}'_{f,u} = (u_{i-1})_{1\leq i\leq n}$, où on a noté, $u_{i-1} = (i-1)!f^{n-i}(u)$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Soit $g$ l'unique application linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ telle que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $g(X^{i-1}) = u_{i-1}$. $g$ est un isomorphisme puisque $g$ transforme une base en une base et la matrice de $g$ dans la base $\mathcal{B}'_{f,u}$ et la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est la matrice identité $I_n$. De plus, $g^{-1}of = D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}og^{-1}$ puisque la matrice représentative de ces deux applications linéaires est $A_{n-1}$.

Si $F$ est un sous-espace de $E$ stable par $f$, $g^{-1}(f(F)) \subset g^{-1}(F)$. Et donc $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}(g^{-1}(F)) \subset g^{-1}(F)$ donc $g^{-1}(F)$ est stable par $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}$. Réciproquement si $F$ est un sous-espace de $E$ tel que $g^{-1}(F)$ soit stable par $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}$, on a $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}(g^{-1}(F)) \subset g^{-1}(F)$ donc $g^{-1}(f(F)) \subset g^{-1}(F)$ donc $gog^{-1}((f(F)) \subset g(g^{-1}(F))$ donc $f(F) \subset F$ donc $F$ est stable par $f$. Ainsi $F$ est un sous-espace stable par $f$ si et seulement si $g^{-1}(F)$ est stable par $D_{|\mathbb{K}_{n-1}[X]}$. D'après III.A.3), $F$ est un sous-espace stable par $f$ si et seulement si $g^{-1}(F) = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ ou $g^{-1}(F) = \mathbb{K}_r[X]$, où $r \in [\![0, n-1]\!]$.
Par définition de $g$,

$\boxed{F \text{ est donc un sous-espace stable par } f \text{ équivaut à } F = \{0_E\} \text{ ou } F = \mathrm{Vect}((\mathrm{u_{i-1}})_{\mathrm{i}\in\{1,\cdots,\mathrm{r}\}}), \text{ où } r \in [\![1, n]\!].}$

$\boxed{\text{Il y a donc } n+1 \text{ sous-espaces stables par } f.}$

Pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$ $\mathrm{Ker}\,(f^i)$ est un sous-espace stable par $f$. En effet, si $u \in \mathrm{Ker}\,(f^i)$, $f^i(u) = 0_E$ donc $f(f^i(u)) = 0_E$ donc $f^i(f(u)) = 0_E$ donc $f(u) \in \mathrm{Ker}\,(f^i)$.
De plus, clairement $\mathrm{Ker}\,(f^i) \subset \mathrm{Ker}\,(f^{i+1})$. Montrons que cette inclusion est stricte pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$. Soit $i \in \{0, \cdots, n-1\}$. Supposons que $\mathrm{Ker}\,(f^i) = \mathrm{Ker}\,(f^{i+1})$. Soit $u \in E$ tel que $f^{n-1}(u) \neq 0_E$. On a $f^n(u) = f^{i+1}(f^{n-i-1}(u))$ et $f^n(u) = 0_E$. Par conséquent $f^{n-i-1}(u) \in \mathrm{Ker}\,(f^{i+1})$. Comme $\mathrm{Ker}\,(f^{i+1}) = \mathrm{Ker}\,(f^i)$, $f^{n-i-1}(u) \in \mathrm{Ker}\,(f^i)$ donc $f^i(f^{n-i-1}(u)) = 0_E$ donc $f^{n-1}(u) = 0_E$. Or, $f^{n-1}(u) \neq 0_E$. On a donc une contradiction, ainsi l'inclusion $\mathrm{Ker}\,(f^i) \subset \mathrm{Ker}\,(f^{i+1})$ est stricte. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}\,(f^i)$ sont donc deux à deux distincts pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, il y en a donc $n+1$ et ils sont tous stables par $f$.
Par suite, $\boxed{\text{les sous-espaces stables par } f \text{ sont les sous-espaces } \mathrm{Ker}\,(f^i), \text{ où } i \in \{0, \cdots, n\}.}$

# Partie IV :

**1.** $MX_i$ étant la colonne $i$ de $M$, par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans } \mathcal{B}_n \text{ est } M.}$

**2.** Le polynôme caractéristique $\chi_f$ de $f$ étant unitaire de degré $n$, il tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$ ; comme il change de signe et est une fonction continue réelle, il admet au moins une racine réelle donc $\boxed{f \text{ a au moins une valeur propre.}}$

**3. (a)** $X$ et $Y$ sont bien des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ puisque pour tout $i$, $x_i = \Re e(z_i)$ et $y_i = \Im m(z_i)$.
Soient $(a, b)$ un couple de réels tels que $aX+bY = 0$ ce qui équivaut à $(a-ib)Z+(a+ib)\overline{Z} = 0$. comme $MZ = \lambda Z$, $M\overline{Z} = \overline{\lambda Z}$. $Z$ et $\overline{Z}$ sont des vecteurs propres de $M$ associés à deux valeurs propres distinctes (car $\lambda \notin \mathbb{R}$), ils forment une famille libre donc $a - ib = a + ib = 0$ ce qui équivaut à $a = b = 0$ ce qui prouve que $\boxed{(X, Y) \text{ est libre.}}$

**(b)** On a immédiatement :

$$\begin{cases} 2MX = MZ + M\overline{Z} = 2\Re e\,((\alpha + i\beta)(X + iY)) = 2(\alpha X - \beta Y) \\ 2MY = \frac{1}{i}\left(MZ - M\overline{Z}\right) = 2\Im m\,((\alpha + i\beta)(X + iY)) = 2(\beta X + \alpha Y) \end{cases}$$

ce qui prouve que le plan vectoriel $F$ est stable par $f$ et la matrice de $f_F$ dans la base $(X, Y)$ est $\boxed{M_F = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}}$

**4.** Soit $E$ un espace vectoriel de **dimension** $n$ **non nulle** et un endomorphisme $f$ de $E$ admet de matrice $M$ dans une base $\mathcal{B}$ donnée de $E$. Si $f$ a une valeur propre réelle $\lambda$, tout vecteur propre de $f$ associé à $\lambda$ engendre une droite stable par $f$.
Si $f$ n'a pas de valeur propre réelle, sa matrice $M$ admet au moins une valeur propre complexe $\lambda$ ($n \neq 0$). En reprenant les notations de la question $C$, les vecteurs $x$ et $y$ de $E$ de matrices $X$ et $Y$ dans la base $\mathcal{B}$ engendrent un plan stable par $E$.Ainsi :

$\boxed{\text{tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie non nulle admet une droite ou un plan stable.}}$

**5.** Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = PX$. Si $P$ est non nul, $\deg(f(P)) = \deg(P)+1$ donc $f(P)$ ne peut pas être colinéaire à $P$ ; de plus $P, f(P), f^2(P)$ est une famille libre (car étagée en degré) donc $P$ ne peut pas appartenir à un plan stable.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme de } \mathbb{R}[X] \text{ défini par } f(P) = PX \text{ n'admet ni droite ni plan stable.}}$$

**6.** **(a)** Par un calcul (à la machine par exemple), $\chi_A(x) = (x-1)\left((x+1)^2+4\right)$ admet comme racines $1$,$-1-2i$ et $-1+2i$.

$AX = X \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$. L'espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite $G$ engendrée par $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$AZ = (-1+2i)Z \iff \begin{cases} x = (1+i)y \\ z = -iy \end{cases}$. Choisissons $Z = \begin{pmatrix} (1+i) \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$. Introduisons comme en question $C$ :

$$u = \frac{Z+\overline{Z}}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } v = \frac{Z+\overline{Z}}{2i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Par la question $C.2$, le plan $F$ engendré par $(u, v)$ est stable et :

$$Au = -u - 2v, \quad Av = 2u - v \cdot$$

$f_F$ n'admet pas de valeur propre réelle donc $F$ ne contient pas de droite stable ce qui prouve que $F$ et $G$ sont supplémentaires. La matrice $P$ est la matrice de passage de la base canonique à la base $(u, v, w)$ soit $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

**(b)** $X : t \mapsto e^t U$ vérifie $X'(t) = e^t U = A(e^t U) = AX$ puisque $U$ appartient à $G$ le sous-espace propre de $A$ associé à 1. De plus, $X(0) = U$.

$$\boxed{t \mapsto e^t U \text{ est donc solution de } \mathcal{P}_U \text{ et c'est la seule par l'unicité de ce problème de Cauchy.}}$$

**(c)** On a immédiatement $x'(0) = -x(0) + 2y(0) = -a + 2b$ et $y'(0) = -2x(0) - y(0) = -2a - b$. $x$ et $y$ étant $\mathcal{C}^1$, par combinaison linéaire, il en est de même de $x'$ et $y'$ et :

$$\begin{cases} x'' = -x' + 2y' = -x' + 2(-2x - y) = -x' - 4x - (x' + x) = -2x' - 5x \\ y'' + y' = -2x' = 2x - 4y = -5y - y' \end{cases}$$

$\boxed{x \text{ et } y \text{ sont solutions de } z'' + 2z' + 5z = 0.}$

Les solutions de cette équation différentielle d'équation caractéristique $s^2 + 2s + 5 = 0$ de racines $-1 \pm 2i$ sont de la forme $z : t \mapsto e^{-t}\left(\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)\right)$ avec $\lambda = z(0)$ et $z'(0) = -\lambda + 2\mu$.

Pour $x$, $\lambda = a$ et $-a + 2\mu = -a + 2b$ soit $\mu = b$ et $x(t) = e^{-t}\left(a \cos(2t) + b \sin(2t)\right)$.

Pour $y$, $\lambda = b$ et $-b + 2\mu = -b - 2a$ soit $\mu = -a$ et $y(t) = e^{-t}\left(b \cos(2t) - a \sin(2t)\right)$.

Ainsi $\boxed{\varphi(t) = e^{-t}(a \cos(2t) + b \sin(2t), b \cos(2t) - a \sin(2t))}$

**(d)** Si $X$ est une solution autre que la solution nulle de $\mathcal{S}$, $X$ ne s'annule pas sinon $X$ et $X'$ s'annulent simultanément et $X$ est la solution nulle par unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Soit $\Gamma$ une trajectoire rectiligne de $\mathcal{S}$. Il existe un vecteur $V$ et une fonction $\gamma$ ne s'annulant pas tels que $X(t)=\gamma(t)V$ d'où

$$X'(t)=\gamma'(t)V=\gamma(t)AV$$

Comme $\gamma$ ne s'annule pas , $AV$ est colinéaire à $V$ donc $V$ est élément de $G$ : on se retrouve dans le cas étudié en $F.2$ avec $U=\gamma(0)V$.

Les trajectoires rectilignes sont les trajectoires incluses dans $G$ et sont paramétrées sous la forme $X(t)=\begin{pmatrix} ae^t \\ 0 \\ ae^t \end{pmatrix}$ avec $a$ réel non nul.

Soit $\Gamma$ une trajectoire plane de $\mathcal{S}$. Il existe deux vecteurs $V_1$ et $V_2$ et deux fonction $\gamma_1$ et $\gamma_2$ non identiquement nulles tel que $X(t)=\gamma_1(t)V_1+\gamma_2(t)V_2$ . La trajectoire n'étant pas rectiligne, il existe un $t_0$ tel que $(X(t_0),X(0)$ est libre soit $\Delta(t_0)=\begin{vmatrix} \gamma_1(t_0) & \gamma_1(0) \\ \gamma_2(t_0) & \gamma_2(0) \end{vmatrix} \neq 0$. De plus :

$$\forall t,\ X'(t)=\gamma_1(t)AV_1+\gamma_2(t)AV_2=(\gamma_1)'(t)V_1+(\gamma_2)'(t)V_2$$

$A$ étant inversible, $(AV_1,AV_2)$ engendrent un plan $\Pi'$ contenant tous les vecteurs $X'(t).\Delta(t_0)$ étant non nuls, ce plan est engendré par $X'(t_0)$ et $X'(0)$, or ces deux éléments appartiennent à $\mathrm{Vect}(V_1,V_2)=\Pi$ : $\pi$ et $\Pi'$ sont donc confondus : $\Pi$ est un plan stable par $A$.
Si $\Pi\neq F$, $\pi\cap F$ est une droite stable donc engendrée par un vecteur propre de $A$ , c'est donc $G$ ce qui est impossible car $F$ et $G$ sont supplémentaires ; d'où $\Pi=F$ et $X=P\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}=PY$.

$P$ étant une matrice constante , $Y'=P^{-1}X'=PAX=P^{-1}APY=TY$ et on retrouve le fait que $(x,y)$ est solution de $\mathcal{C}_\sigma$. D'où il existe $(a,b)$ tels que

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t}(a\cos(2t)+b\sin(2t)) \\ e^{-t}(b\cos(2t)-a\sin(2t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les trajectoires planes sont les trajectoires incluses dans $F$ et sont paramétrées sous la forme $X(t)=\begin{pmatrix} e^{-t}((a+b)\cos(2t)+(b-a)\sin(2t)) \\ e^{-t}(a\cos(2t)+b\sin(2t)) \\ e^{-t}(-b\cos(2t)+a\sin(2t)) \end{pmatrix}$ avec $(a,b)$ réels non tous deux nuls.

# Partie IV :

**1.** **(a)** Si $\mathcal{B}$ est orthonormée pour le produit scalaire, on a $\varepsilon_i.\varepsilon_j=\delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}=1$ si $i=j$ et 0 sinon. Aussi si $u=\sum_{i=1}^{n}u_i\varepsilon_i$ et $v=\sum_{i=1}^{n}v_i\varepsilon_i$, on a nécessairement par bilinéarité du produit scalaire :

$$u.v=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}u_iv_j\delta_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i$$

On vérifie aisément que ceci est bien un produit scalaire : c'est bien une forme bilinéaire, telle que $u.u\geq 0$ pour tout $u$ et ne vaut 0 que pour le vecteur nul.

**(b)** On remarque donc que $\boxed{u.v = {}^tUV}$

**2.** Les éléments $x$ de $H$ sont donc définis par ${}^tUX = 0$ où $X$ représente $x$ dans la base $\mathcal{B}$. $f(x)$ est donc représenté par $AX$ dans la base $\mathcal{B}$
Supposons $H$ stable par $f$. Pour tout élément $x$ de $H$, $f(x)$ est élément de $H$ donc :

$$\forall x \in H,\ {}^tUAX = {}^t({}^tAU)X = 0$$

Si $V = {}^tAU$, le vecteur $v$ représenté par $V$ dans la base $\mathcal{B}$ est donc orthogonal à $H$ : il appartient donc à $D$ et est colinéaire à $u$ ce qui équivaut à $U$ est un vecteur propre de ${}^tA$
Réciproquement, supposons que $U$ est un vecteur propre de ${}^tA$ alors il existe $\lambda$ tel que ${}^tAU = \lambda U$ soit ${}^tUA = \lambda {}^tU$ donc si $x$ est élément de $H$, ${}^tU(AX) = \lambda {}^tUX = 0$ ce qui prouve que $f(x)$ représenté par $AX$ dans la base $\mathcal{B}$ est élément de $H$.

$$\boxed{H \text{ est stable par } f \text{ si et seulement si } U \text{ est un vecteur propre de } {}^tA.}$$

**3.** On a ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice a le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres que $A$. Son spectre réel est donc réduit à $\{1\}$.

$${}^tAX = X \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ -4x - 3y + z = 0 \end{cases} \iff x = z = -y$$

$\boxed{\text{Il n'y a qu'un plan stable orthogonal au vecteur } \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \text{ ;il a donc comme équation } x - y + z = 0.}$

On retrouve le plan $F$ trouvé précédemment.

**4.** **(a)** Soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres. Sot $H_i$ l'hyperplan d'équation $x_i = 0$ dans la base $\mathcal{B}$ engendré par les vecteurs $\varepsilon_j$ avec $j \neq i$. Etant engendré par des familles de vecteurs propres , $\boxed{\text{ces hyperplans sont stables par } f \text{ et } \bigcap_{i=1}^{n} H_i = \{0\}.}$

**(b)** Soit $D_i = \bigcap_{j \neq i} H_j$. Par récurrence sur $p$, l'intersection de $p$ hyperplans est de dimension au moins $n - p$. La propriété est vraie à l'ordre $p = 1$ puisqu'un hyperplan est de dimension $n - 1$.
Supposons la propriété vraie à l'ordre $p$. Soit $K_1, \cdots, K_{p+1}$ $p + 1$ hyperplans et on pose $K = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$ et $K' = \bigcap_{i=1}^{p+1} H_i$. Comme $K' = K \cap K_{p+1}$

$$\dim K' = -\dim(K + K_{p+1}) + \dim K + (n - 1)\cdot$$

Or $\dim(K + K_{p+1}) \leq n$ et par hypothèse de récurrence, $\dim K \geq n - p$, d'où

$$\dim K' \geq \dim K - 1 \geq n - (p + 1)\cdot$$

ce qui clôt la récurrence.
Aussi $D_i = \bigcap_{j \neq i} H_j$ est au moins de dimension 1 mais comme $H_i \cap D_i = \{0\}$ :

$$\dim(H_i + D_i) = \dim(H_i) + \dim(D_i) \leq n \Longleftarrow \dim(D_i) \leq 1$$

donc $D_i$ est une droite supplémentaire de $H_i$. Désignons par $\varepsilon_i$ un vecteur directeur de $D_i$. Comme intersection de sous-espaces stables par $f$, $D_i$ est stable par $f$.

Il reste à vérifier que $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ est une base de $E$. Soient $a_1, \cdots, a_n$ tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \varepsilon_j = 0$.

Soit $i$ fixé :

$$a_i \varepsilon_i = -\sum_{j=1} n a_j \varepsilon_j$$

Le vecteur de gauche est élément de $D_i$ et celui de droite de $H_i$. Comme l'intersection est réduite à 0, $a_i = 0$. La famille $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ est libre de cardinal $n$ dimension de $E$ : c'est donc une base de vecteurs propres, ce qui prouve que $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$