CCP 2007 PC Math 1

Je note $\mathcal{BC}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$

PREMIERE PARTIE

1. On a :

$$M_a - (1+3a)\, I_3 = \begin{pmatrix} -3a & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -2-a & 2+a \\ -3a & -2-a & 2+a \end{pmatrix}$$

   - On constate que la ligne 2 est l'opposée de la ligne 3 : Le rang est au plus 2.
   - Si $a \neq 0$ la ligne 1 et la ligne 2 sont proportionnelles si et seulement si elles sont égales (cf la première colonne) et donc si et seulement si $1-4a = -2-a$, ce qui équivaut à $a=1$.
     - Si $a \notin \{0,1\}$ le rang est 2
     - si $a=1$ le rang est au plus 1, et même exactement 1 car alors on a $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ non nul.
   - Si $a=0$ On a la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ de rang 1.

$$\boxed{rg\,(M_a - (1+3a)\, I_3) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in \{0,1\} \\ 2 \text{ sinon} \end{cases}}$$

   $M_a - (1+3a)\, I_3$ n'est pas de rang 3 donc $1+3a$ est valeur propre de M_a. La dimension du sous espace est celle du noyau de $M_a - (1+3a)\, I_3$, soit 3 moins le rang de la matrice

$$\boxed{\dim\left(E_{1+3a}(M_a)\right) = \begin{cases} 2 \text{ si } a \in \{0,1\} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}}$$

2. De façon évidente $M_a V = V$.

   Comme $M_a V = V$ avec $V \neq 0$, 1 est valeur propre de M_a.

   Or la somme des valeurs propres (réelles ou complexes) est égale à la trace, donc à $6a+3$. La troisième valeur propre est donc $1+3a$ qui est toujours réel. On a les valeurs propres 1 et $1+3a$. Elles sont distinctes si $a \neq 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{si } a \neq 0 \text{ Les valeurs propres de } M_a \text{ sont 1 (simple) et } 1+3a \text{ (double)} \\ \text{si } a = 0 \text{ on a une seule valeur propre 1 (triple)} \end{array}}$$

3. Comme on a trouvé trois valeurs propres réelles (distinctes ou non) pour une matrice réelle 3×3, la matrice M_a est toujours trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

   La matrice est diagonalisable si et seulement si la dimension de chaque sous espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante.

   - si $a \neq 0$:
     - 1 étant valeur propre simple, le sous espace propre est donc toujours de dimension 1 (c'est la droite $\text{Vect}(V)$)
     - $1+3a$ est valeur propre double, et la dimension du sous espace propre est connue d'après **I. 1**
   - si $a=0$, 1 est valeur propre triple et le sous espace propre est de dimension 2

$$\boxed{M_a \text{ est diagonalisable si et seulement si } a = 1}$$

4.

   4. a) On veut diagonaliser M_1 :

   - on sait déjà que $E_1(M_1) = \text{Vect}(V)$

- l'autre valeur propre est 4. et d'après la matrice du **I. 1** le sous espace propre est le plan d'équation (dans $\mathcal{BC}$) : $-x-y+z=0$ une base est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a <u>une</u> solution possible :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

4. b) $\frac{m}{4}$ est la matrice I_2. Donc toutes les matrices de symétrie sont des racines carrées de $\frac{m}{4}$. En particulier les matrices des symétries orthogonales.

Toutes les matrices $m_\theta = 2\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ donnent une infinité de racines carrées de m.

Un calcul par bloc donne alors que les matrices $D_\theta = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\theta & 2\sin\theta \\ 0 & 2\sin\theta & -2\cos\theta \end{pmatrix}$ sont toutes des racines carrées de D.

Toutes les matrices $PD_\theta P^{-1}$ sont alors des racines carrées de M_1, en nombre infini car $M->PMP^{-1}$ est une bijection

$$\boxed{M_1 \text{ admet une infinité de racines carrées}}$$

Si on fait le calcul avec les notations du **4.a)** $P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est une solution du problème.

5. On a

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et un produit de matrices donne $N^2 = (0)$

On a donc (binôme de Newton comme N et I_3 commutent) :

$$(\alpha I_3 + \beta N)^2 = \alpha^2 I_3 + 2\alpha\beta N = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\beta & -2\alpha\beta \\ 0 & \alpha^2 - 4\alpha\beta & 4\alpha\beta \\ 0 & -4\alpha\beta & \alpha^2 + 4\alpha\beta \end{pmatrix}$$

Si $(\alpha I_3 + \beta N)^2 = M_0$ on a donc (première ligne) $\alpha^2 = 1$ et $2\alpha\beta = 1$ ce qui donne $(\alpha = 1,\ \beta = 1/2\ )$ ou $(\alpha = -1,\ \beta = -1/2\ )$

On vérifie alors que pour ces valeurs les 9 coefficients vérifient la relation.

$$\boxed{\text{on a } \left(I_3 + \tfrac{1}{2}N\right)^2 = M}$$

6. Pour $a = -\frac{1}{3}$

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 7/3 & -7/3 \\ 1 & -5/3 & 5/3 \\ 1 & -5/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres sont 1 (simple) et 0 (double).

6. a) On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} x + \frac{7}{3}y - \frac{7}{3}z = 0 \\ x - \frac{5}{3}y + \frac{5}{3}z = 1 \\ x - \frac{5}{3}y + \frac{5}{3}z = 1 \end{cases}$$

On peut résoudre par Pivot de gauss

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/12 \\ -1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

6. b) On cherche une base $\mathcal{B} = (I, J, K)$ telle que $u(I) = \overrightarrow{0}$, $u(J) = I$, $u(K) = K$.

K est un vecteur propre pour la valeur propre 1. on peut prendre K tel que $Mat_{\mathcal{BC}}(I) = V$

I est un vecteur un noyau. Un calcul (ou une simple vérification) donne une solution $Mat_{\mathcal{BC}}(K) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

J est alors solution du système précédent par exemple si $z = 0$ $Mat_{\mathcal{BC}}(J) = \begin{pmatrix} 7/12 \\ -1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. c) En faisant le calcul sans utiliser la simplification usuelle qui utilise la stabilité des sous espaces propres (qui est prouvée au II) on pose $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et donc $XU = UX$ donne $\begin{matrix} 0 = d & , & a = e & , & c = f \\ 0 = 0 & , & d = 0 & , & f = 0 \\ 0 = g & , & g = h & , & i = i \end{matrix}$ ce qui équivaut à : $c = d = f = g = h = 0$, $a = e$

$$\boxed{\exists (a,\ b,\ i) \in \mathbb{R}^3,\ X = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}}$$

Si X est une racine carrée de U on a $X^2 = U$ et donc $XU = UX = X^3$, donc X est du type précédent. Or

$$X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

impose $a = 0$ et $2ab = 1$ (donc $a \neq 0$) absurde

$$\boxed{U \text{ n'a pas de racine carrée}}$$

6. d) U et $M_{-1/3}$ étant semblables, il existe P inversible telle que $M_{-1/3} = PUP^{-1}$. Si Y est une racine carrée de $M_{-1/3}$ on a :

$$\left(P^{-1}YP\right)^2 = P^{-1}Y^2P = P^{-1}M_{-1/3}P = U$$

absurde car U n'a pas de racine carrée

$$\boxed{M_{-1/3} \text{ n'a pas de racine carrée}}$$

DEUXIEME PARTIE

7. On remarque qu'il s'agit de démontrer l'interpolation de Lagrange

1. a) φ est bien définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

- linéaire car : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(P + \lambda Q) = ((P + \lambda Q)(a_i))_{i=1}^n = (P(a_i))_{i=1}^n + \lambda (Q(a_i))_{i=1}^n = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$$

- φ est injective : Car si Q est dans le noyau Q est un polynôme de degré au plus $n-1$ ayant au moins n racines (les a_i) donc Q est le polynôme nul.

1. b) φ est donc linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. φ est donc un isomorphisme et tout élément de $\mathbb{R}^n$ (en particulier $(b_i)_{i=1}^n$) admet un unique antécédent.

$$\boxed{\forall (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n,\ \exists! Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \forall i \in [[1, n]],\ Q(a_i) = b_i}$$

8.

2. a) Soit λ une valeur propre de f, et $v \in E_\lambda(f)$. On veut montrer $g(v) \in E_\lambda(f)$ soit $f(g(v)) = \lambda g(v)$:

$$f(g(v)) = (f \circ g)(v) = (g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$$

la deuxième égalité découle de l'hypothèse de cette question et la dernière de la linéarité de g

2. b) On sait que si g est diagonalisable, l'endomorphisme induit par g sur un sous espace stable est diagonalisable. Ici E_{λ_i} est stable pas g d'après le **a)** donc g_i est diagonalisable et il existe une base de vecteurs propres pour g_i (donc pour g) dans E_{λ_i}

Soit alors $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^p \mathcal{B}_i$. Comme les sous espaces propres sont en somme directe $\mathcal{B}$ est une base de $\oplus E_{\lambda_i}$, donc de E car f est diagonalisable.

Tout vecteur de $\mathcal{B}$ est alors un vecteur propre de f et de g par construction.

$$\boxed{\text{il existe une base de vecteurs propres communs à } f \text{ et } g}$$

9. Soient f et g les endomorphismes de matrices A et B dans la base canonique et $\mathcal{B}$ la base précédente (qui existe car A et B sont diagonalisables et commutent) Soit alors P la matrice de passage de $\mathcal{BC}$ à $\mathcal{B}$ les matrices $P^{-1}AP = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $P^{-1}BP = Mat_{\mathcal{B}}(g)$ sont diagonales.

10. Sur $\mathbb{R}^n$ on sait que le produit scalaire canonique s'exprime dans toute base orthonormée $\varphi(x,\ y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^tXY$ si $X = mat(x)$ et $Y = mat(y)$

4. a) et b)

- Soit λ une valeur propre de S, il existe un vecteur propre non nul X. On a donc $SX = \lambda X$ et donc
$$ {}^tXSX = \lambda^t XX = \lambda \|X\|^2 $$
X étant non nul on a donc
$$ \lambda = \frac{{}^tXSX}{\|X\|^2} \begin{cases} \geq 0 \text{ si } S \text{ est positive} \\ > 0 \text{ si } S \text{ est strictement positive } (X \neq 0\ ) \end{cases} $$
- Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée et donc il existe P orthogonale et D diagonale $S = PD^tP$.
On a alors ${}^tXSX = {}^tXPD^tPX = {}^t\left(X^tP\right)D({}^tPX) = {}^tYDY$ en posant $Y = {}^tPX$. On a donc ${}^tXSX = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$ en développant le produit.
  - Si les valeurs propres de S sont positives les d_i sont positifs et on a une somme de réels positifs donc un réel positif ${}^tXSX \geq 0$
  - Si les valeurs propres sont strictement positives et si X(donc aussi Y car P est inversible) est non nul, on a une somme de réels positives l'un au moins étant strictement positif donc ${}^tXSX > 0$

$$ \boxed{\begin{array}{c} S \text{ est positive ssi } Sp(S) \subset \mathbb{R}^+ \\ S \text{ est définie positive ssi } Sp(S) \subset \mathbb{R}^{+*} \end{array}} $$

11.

5. a) Les (λ_i) étant deux à deux distincts c'est une application du **II. 1)** avec : $n = p,\ a_i = \lambda_i,\ b_i = \sqrt{\lambda_i}$ (qui existent car les λ_i sont positifs)

5. b) S est symétrique donc toutes les puissances de S sont symétriques, donc $Q(S)$ est une combinaison linéaire de matrices symétriques donc $Q(S)$ est symétrique.

Si on diagonalise S dans une base orthonormée $S = PDP^{-1}$ on a $Q(S) = PQ(D)P^{-1}$, donc les valeurs propres de $Q(S)$ sont les $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$, donc elles sont toutes positives. $Q(S)$ est symétrique et ses valeurs propres sont positives donc $Q(S)$ est une matrice positive.

5. c) En continuant le calcul précédent on a $Q(S)^2 = PQ(D)^2P^{-1} = PDP^{-1} = S$. On a bien $Q(D)^2 = D$ car les termes diagonaux de $Q(D)$ sont les $Q(\lambda_i)$ (calcul évident la matrice étant diagonale) donc les $\sqrt{\lambda_i}$ qui élevé au carré redonne les λ_i ;

5. d)

- Si $T^2 = S$ alors $TS = ST = T^3$
- On a alors par récurrence pour tout i entier $TS^i = S^iT$, puis par combinaison linéaire $TQ(S) = Q(S)T$.
T et $Q(S)$ sont diagonalisables (symétriques réelles) et commutent. Elles sont donc simultanément diagonalisables (**II. 2)**. Ils existent P inversible, D et Δ diagonales telles que $T = PDP^{-1}$ et $Q(S) = P\Delta P^{-1}$. Or $T^2 = Q(S)^2$ donc $D^2 = \Delta^2$. Donc en notant $D = diag(d_i)$ et $\Delta = diag(\delta_i)$, on a pour tout i, $d_i^2 = \delta_i^2$. Or les deux matrices sont symétriques positives donc les valeurs propres (les d_i et les δ_i) sont toutes positives. donc pour tout i $d_i = \delta_i$, soit $D = \Delta$ et donc $T = Q(S)$

$$ \boxed{\text{Toute matrice symétrique positive admet un unique racine carrée symétrique positive.}} $$

5. e) On cherche Q de degré 1 tel que $Q\left(\lambda_1\right) = \sqrt{\lambda_1}$ et $Q(\lambda_2) = \sqrt{\lambda_2}$. Soit on pose le système linéaire soit on utilise les polynômes de Lagrange :
$$ Q(X) = \sqrt{\lambda_1}\frac{X - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + \sqrt{\lambda_2}\frac{X - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} $$
En simplifiant :
$$ Q(X) = \frac{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}X + \frac{\lambda_1\sqrt{\lambda_2} - \lambda_2\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}X + \frac{\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}} $$
donc
$$ \sqrt{S} = Q(S) = \frac{S + \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}I_n}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}} $$

12.

6. a) Toujours en utilisant la décomposition d'une matrice symétrique réelle $S = PDP^{-1}$ on a $S^2 = PD^2P^{-1}$, . S^2 est donc une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont les termes diagonaux de D^2, donc le carré d'un réel, donc un réel positif. S^2 est symétrique positive.

6. b) Toujours avec $S = PDP^{-1}$ on a en notant $D = diag(d_i)$ on a : $D^2 = diag(d_i^2)$, $|D| = \sqrt{D^2} = diag(|d_i|)$.
donc $|D| + D = diag(|d_i| + d_i)$ et $|D| - D = diag(|d_i| - d_i)$

Or si $S = PDP^{-1}$ on a $S^2 = PD^2P^{-1}$ et $\sqrt{S^2} = P\sqrt{D^2}P^{-1}$. en effet $P\sqrt{D^2}P^{-1}$ est symétrique réelle (car P est orthogonale donc $P^{-1} = {}^tP$) positives (ses valeurs propres sont les $|d_i| \geq 0$) et vérifie bien $\left(P\sqrt{D^2}P^{-1}\right)^2 = PD^2P^{-1} = S^2$. C'est donc l'unique racine carrée symétrique positive de S^2.

On a donc $|S| + S = P\left(|D| + D\right)P^{-1}$, symétrique réelle de valeurs propres $|d_i| + d_i \geq 0$, et de même pour $|S| - S$

6. c) S_1 et S_2 sont bien symétriques réelles. On a $S_1^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ et $S_2^2 = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$ les matrices ont le même polynôme caractéristique $\lambda^2 - 20\lambda + 64$ donc les mêmes valeurs propres 4 et 16. On a deux valeurs propres distinctes, on peut utiliser le **II. 5. e**

$$|S_i| = \frac{S_i^2 + \sqrt{4}\sqrt{16}I_n}{\sqrt{4} + \sqrt{16}} = \frac{S_i^2 + 8I_n}{6}$$

$$\boxed{|S_1| = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } |S_2| = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

TROISIEME PARTIE

13. On vérifie par récurrence que pour tout n $a_n > 0$ et $b_n > 0$

- c'est vrai si $n = 0$ car $a_0 = a > 0$ et $b_0 = 1 > 0$
- Si c'est vrai au rang n c'est vrai au rang $n+1$ car $\mathbb{R}^{+*}$ est stable par passage à l'inverse, somme et produit.

14. **2. a)** On vérifie que la suite est constante :

$$v_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \frac{a_k + \frac{1}{b_k}}{b_k + \frac{1}{a_k}} = \frac{\frac{a_kb_k+1}{b_k}}{\frac{a_kb_k+1}{a_k}} = \frac{a_k}{b_k}$$

comme $\frac{a_0}{b_0} = a$ on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{a_k}{b_k} = a$$

2. b) On a

$$u_{k+1} = a_{k+1}b_{k+1} = \frac{1}{4}(a_k + \frac{1}{b_k})(b_k + \frac{1}{a_k}) = \frac{1}{4}(a_kb_k + 2 + \frac{1}{a_kb_k}) = \frac{1}{4}\left(u_k + 2 + \frac{1}{u_k}\right)$$

2. c) Soit $f(x) = \frac{1}{4}\left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, dérivable de dérivée $\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{x^2})$. D'où le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Donc f est minimum en 1 et $f(1) = 1$.
D'après **III. 1)** $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k > 0$ donc $u_{k+1} = f(u_k) \geq 1$.

$$\forall k \geq 1,\ u_k \geq 1$$

2. d) La suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est décroissante :

$$u_{k+1} - u_k = \frac{1}{4}\left(u_k + 2 + \frac{1}{u_k}\right) - u_k = \frac{1}{4u_k}\left(-3u_k^2 + 2u_k + 1\right) = \frac{1}{4u_k}(1 - u_k)(u_k + \frac{1}{3})$$

Cette quantité est négative si $u_k \geq 1$, donc si $k \geq 1$.

La suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est décroissante minorée par 0. elle converge vers un point fixe de f (car est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$). Or

$$f(x) = x \iff \frac{1}{4x}(1-x)(x+\frac{1}{3}) = 0 \iff x = 1 \text{ (dans } \mathbb{R}^{+*} \text{)}$$

$$\boxed{\text{la suite } (u_k) \text{ converge vers } 1}$$

15. Par définition de u_k et v_k on a $a_k^2 = u_k v_k$. Or pour tout k, $a_k > 0$ donc $a_k = \sqrt{u_k v_k} = \sqrt{a u_k}$. Donc (a_k) converge et $\underline{\lim (a_k) = \sqrt{a}}$ puis comme $b_k = \frac{a_k}{v_k} = \frac{a_k}{a}$, (b_k) converge et $\underline{\lim(b_k) = \frac{1}{\sqrt{a}}}$

16. **4. a)** D'après **II. 4)** les valeurs propres d'une matrice symétrique définie positive sont strictement positives (donc non nulles). le noyau est donc réduit à $\{0\}$ et la matrice est inversible.

    4. b) S étant symétrique inversible on peut décomposer $S = PDP^{-1}$ avec P orthogonale ($P^{-1} = {}^tP$). On a alors $S^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. on a donc ${}^tS = S$ (P est orthogonale et ${}^tD = D$) et les valeurs propres de S^{-1} sont strictement positives (inverse de réels strictement positifs). donc $\underline{S^{-1} \text{ est symétrique définie positive}}$.

    4. c) Si S_1 et S_2 sont symétriques définies positives. on a pour toute colonne X non nulle : ${}^tXS_1X > 0$ et ${}^tXS_2X > 0$ donc ${}^tX(S_1+S_2)X > 0$, de plus S_1+S_2 est symétrique. donc $\underline{S_1 + S_2 \text{ est symétrique définie positive}}$.

17. Par récurrence :

    - A_0 et B_0 sont symétriques définies positives. Par hypothèse pour A, et I_n est bien symétrique à valeurs propres strictement positives (1>0)
    - Si A_k et B_k sont symétriques définies positives ces deux matrices sont inversibles donc A_{k+1} et B_{k+1} existent. d'après la question précédente $\left(A_k + B_k^{-1}\right)$ et $\left(B_k + A_k^{-1}\right)$ sont symétriques définies positives. Le coefficient 1/2 conserve le caractère symétrique et le signe de valeurs propres donc A_{k+1} et B_{k+1} sont symétriques définies positives.

    $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ A_k \text{ et } B_k \text{ sont symétriques définies positives}}$$

18.

    6. a) Une matrice diagonale est toujours symétrique, et les valeurs propres de D sont celles de A donc des réels strictement positifs. D est symétrique strictement positive.

    6. b) calcul :

    $$D_0 = P^{-1}AP = D, \qquad \Delta_0 = P^{-1}I_nP = I_n$$

    $$D_{k+1} = P^{-1}A_{k+1}P = P^{-1}\left(\frac{A_k + B_k^{-1}}{2}\right)P = \frac{1}{2}\left(P^{-1}A_kP + P^{-1}B_k^{-1}P\right) = \frac{1}{2}(D_k + \Delta_k^{-1})$$

    idem pour Δ_k.

    les matrices sont diagonales par récurrence :

    - $D_0 = D$ et $\Delta_0 = I_n$ sont diagonales
    - Si D_k et Δ_k sont diagonales D_{k+1} et Δ_{k+1} sont diagonales par stabilité de l'ensemble des matrices diagonales par passage à l'inverse et combinaison linéaire

    6. c) erreur de texte : les limites sont en général différentes.

    Pour tout $i \in [[1, n]]$, soit $d(i)$, $d_k(i)$ et $\delta_k(i)$ les termes diagonaux de D, D_k et Δ_k sur la ligne i.

    On a

    $$d_0(i) = d(i), \delta_0(i) = 1, \forall k \in \mathbb{N}, \left(d_{k+1}(i) = \frac{1}{2}\left(d_k(i) + \delta_k(i)^{-1}\right), \delta_{k+1}(i) = \frac{1}{2}\left(d_k(i)^{-1} + \delta_k(i)\right)\right)$$

    on retrouve les suites du **III. 1)**. $(d_k(i))$ converge vers $\sqrt{d(i)}$ et $(\delta_k(i))$ converge vers $\frac{1}{\sqrt{d(i)}}$.

    Et donc

    $$\boxed{\text{la suite } (D_k) \text{ converge vers } \sqrt{D} \text{ et la suite } (\Delta_k) \text{ vers } \left(\sqrt{D}\right)^{-1}}$$

19.

    7. a) l'application est linéaire en dimension finie, elle est donc continue.

    7. b) On a donc $A_k = PD_kP^{-1}$ image dune suite convergente par une application continue donc (A_k) converge et $\lim (A_k) = P\sqrt{D}P^{-1} = \sqrt{A}$

    et de même $\lim (B_k) = \left(\sqrt{A}\right)^{-1}$