DS-6-Centrale — Corrigé

I Fonction zêta

Q1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$ (série de Riemann), donc $D_\zeta =]1, +\infty[$.

Q2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in]-1, +\infty[\mapsto \frac{1}{n^x} = \exp(-x \ln(n))$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]-1, +\infty[$ (c'est une exponentielle).
- Pour tout $[a, b] \subset]1, +\infty[$ avec $a < b$, pour tout $x \in [a, b]$, $|f_n(x)| \leq f_n(a)$ (car f_n est décroissante),
  donc $\|f_n\|_\infty^{[a,b]} \leq f_n(a)$.
  Or, $\sum_{n\geq 1} f_n(a)$ converge (et vaut $\zeta(a)$), donc, par comparaison, $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge.
  La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge donc normalement sur $[a, b]$, donc uniformément sur $[a, b]$.

Par suite, $\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$.
Ceci étant valable pour tout $[a, b] \subset]1, +\infty[$, ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Q3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est décroissante sur $]1, +\infty[$, donc ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$ comme somme simple sur $]1, +\infty[$ d'une série de fonctions décroissantes.

Q4. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq 0$, donc $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \geq 0$.

La fonction ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$ et minorée par 0, donc elle admet une limite (positive) en $+\infty$.

Q5. Soit $x \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$. tel que $n \geq 2$.

Soit $g : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{1}{t^x}$. Le fonction g est décroissante sur $[1, +\infty[$ comme inverse d'une fonction croissante et positive.

a) Pour tout $t \in [n, n+1]$, $g(t) \leq g(n)$ (car g décroissante sur $[1, +\infty[$, donc sur $[n, n+1]$ (car $n \geq 2$)).
D'où, par positivité de l'intégrale ($n \leq n + 1$), on a :

$$\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} g(n)\,\mathrm{d}t, \quad \text{ie} \quad \int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leq g(n) = \frac{1}{n^x}.$$

b) De même, por tout $t \in [n-1, n]$, $g(n) \leq g(t)$ (car g décroissante sur $[1, +\infty[$, donc sur $[n-1, n]$ (car $n \geq 2$)).
D'où, par positivité de l'intégrale ($n - 1 \leq n$), on a :

$$\int_{n-1}^{n} g(n)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n} g(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{ie} \quad \frac{1}{n^x} = g(n) \leq \int_{n-1}^{n} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

c) En mettant bout à bout les deux inégalités obtenues, on a bien :

$$\int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

Q6. Comme $x > 1$, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt$ converge (Riemann), en sommant l'encadrement obtenu à la question précédente pour $n = 2, 3, \ldots, +\infty$ (la série et les intégrales convergent), on obtient, grâce à la relation de Chasles,

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t.$$

En ajoutant 1 à tous les membres de l'encadrement, on obtient :

$$1 + \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leq 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x) \leq 1 + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, comme

$$\begin{aligned} \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{(x-1)t^{x-1}}\right]_{2}^{+\infty} = \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \\ \text{et } \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{(x-1)t^{x-1}}\right]_{1}^{+\infty} = \frac{1}{(x-1)} \quad (\text{car } x-1>0), \end{aligned}$$

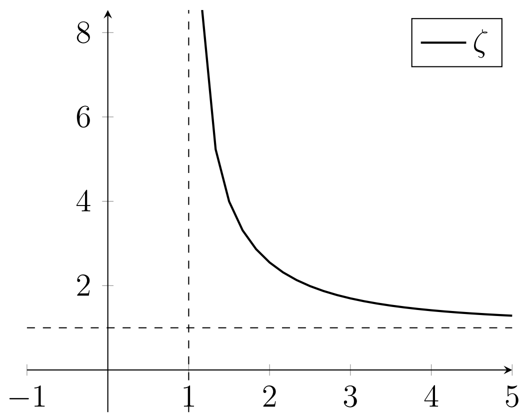
on a bien l'encadrement souhaité :

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Q7. Comme, pour tout $x > 1$, $\zeta(x) \geq 1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}}$ où $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = +\infty$,

Q8. Comme, pour tout $x > 1$, $1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \dfrac{1}{x-1}$, où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x-1} = 1$, on a, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

Q9. On a le graphe suivant :



II Étude d'une fonction définie par une somme

II.A - Ensemble de définition et variations

Q10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(-n)$ n'existe pas (division par zéro).

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-n,\ n \in \mathbb{N}\}$,

$$\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(n+x)} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est absolument convergente, donc $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right)$ converge (absolument), donc $f(x)$ existe.

Par suite, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Q11. Posons $g_n : x \in \mathscr{D}_f \mapsto \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right) = -\frac{x}{n(n+x)}$.

a) Pour tout $n \geq 1$, g_n est continue sur $\mathscr{D}_f$.

b) Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $\mathscr{D}_f$. Il existe alors $n_0 \geq 1$, $n_0 + a > 0$. Pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in [a, b]$, on a alors :

$$|g_n(x)| \leq \frac{\max(|a|, |b|)}{n(n+a)}$$

Donc, pour tout $n \geq n_0$,

$$\|g_n\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\max(|a|, |b|)}{n(n+a)}$$

Or $\sum_{n\geq n_0} \frac{\max(|a|, |b|)}{n(n+a)}$ converge (cf **Q10**), donc $\sum_{n\geq n_0} g_n$ converge normalement sur $[a, b]$. Comme la convergence ne dépend pas des premiers termes, $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[a, b]$.

La fonction $f = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est donc continue sur $[a, b]$ ceci pour tout $[a, b] \subset \mathscr{D}_f$, donc f est continue sur $\mathscr{D}_f$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : x \mapsto \dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n}$ est décroissante sur chaque intervalle contenu dans $\mathscr{D}_f$, donc $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est décroissante sur chaque intervalle contenu dans $\mathscr{D}_f$ comme somme d'une série de fonctions décroissantes.
f est donc décroissante sur $]-n-1, -n[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et sur $]-1, +\infty[$.

II.B – Équivalents

Q12. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+k} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \sum_{j=k+1}^{N+k}\frac{1}{j} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \quad \text{(en posant } j = n+k\text{)}\\
&= \sum_{n=N+1}^{N+k}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} \quad \text{(téléscopage)}\\
&= \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{N+j} - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} \quad \text{(en posant } j = n-N\text{)}\\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} \quad \text{(somme de } k \text{ (fixé) limites nulles),}
\end{aligned}$$

donc $f(k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n}\right) = -\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}$.

Q13. Un équivalent classique[1] donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} \underset{k\to+\infty}{\sim} \ln(k)$ (s'obtient par comparaison série intégrale).
Pour tout $x > 1$, $1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
D'où, comme f est décroissante sur $]-1, +\infty[$, $f(\lfloor x \rfloor) \geq f(x) \geq f(\lfloor x \rfloor + 1)$, et, en divisant pas $-\ln(x)$ (< 0 car $x > 1$), on a finalement :

$$-\frac{f(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} \leq \frac{f(x)}{-\ln x} \leq -\frac{f(\lfloor x \rfloor + 1)}{\ln x}.$$

De plus, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, donc $1 - \dfrac{1}{x} < \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$ et, par suite, $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
D'où, quand $x \to +\infty$, $\lfloor x \rfloor \to +\infty$ et $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$, donc

$$f(\lfloor x \rfloor) = -\sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor}\frac{1}{n} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln(\lfloor x \rfloor) = -\underbrace{\ln(x)}_{\to+\infty} - \underbrace{\ln\left(\overbrace{\frac{\lfloor x \rfloor}{x}}^{\to 1}\right)}_{\to 0} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln x.$$

[1] Soit on sait et on le sort sans réfléchir, soit... on serre les dents et on le redémontre !

On a donc $\lim_{x\to+\infty} -\dfrac{f(\lfloor x\rfloor)}{\ln x} = 1$ et $-\dfrac{f(\lfloor x\rfloor+1)}{\ln x} = -\dfrac{f(\lfloor x+1\rfloor)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = \dfrac{\ln(x)+\ln(1+1/x)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\to} 1$, donc, comme $-\dfrac{f(\lfloor x\rfloor)}{\ln x} \leq \dfrac{f(x)}{-\ln x} \leq -\dfrac{f(\lfloor x\rfloor+1)}{\ln x}$, on a, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{-\ln x} = 1$, donc[2]

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln x.}$$

Q14. $x+k \notin D_f \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : x+k=-n \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : x=-(k+n) \Rightarrow x \notin D_f$ (car $k+n \in \mathbb{N}^*$).

Par contraposée, on a bien $x \in D_f \Rightarrow x+k \in D_f$.

Le calcul de $(x+k)-f(x)$ reprend les mêmes idées qu'à la question **Q12**Pour tout $x \in D_f$, $x+k \in D_f$ et

$$\begin{aligned} f(x+k)-f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+k+x}-\frac{1}{n}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+k+x}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+k+x}-\frac{1}{n+x}\right). \end{aligned}$$

Or, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+k+x}-\frac{1}{n+x}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+k+x} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+x} \\ &= \sum_{j=k+1}^{N+k}\frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{j+x} \quad \text{(en posant } j=n+k\text{)} \\ &= \sum_{n=N+1}^{N+k}\frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n+x} \quad \text{(téléscopage)} \\ &= \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j+N+x} - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n+x} \quad \text{(en posant } j=n-N\text{)} \\ &\underset{N\to+\infty}{\to} 0 - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n+x} \quad \text{(somme de } k \text{ (fixé) limites nulles),} \end{aligned}$$

donc

$$f(x+k)-f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+k+x}-\frac{1}{n+x}\right) = -\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n+x}.$$

Q15. Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = f(x+k) + \displaystyle\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n+x} = f(x+k) + \frac{1}{x+k} + \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n+x}$.

[2] On s'éponge le front et on soupire, parce que cela ne fait que commencer.

Or,

$$\lim_{x\to -k} f(x+k) = f(0) = 0 \quad \text{(par continuité de } f \text{ en 0)},$$
$$\lim_{x\to -k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n+x} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n-k} \quad \text{(limite finie)}$$
$$\text{et } \lim_{x\to -k} \left|\frac{1}{x+k}\right| = +\infty,$$

donc

$$\boxed{f(x) \underset{x\to -k}{\sim} \frac{1}{x+k}.}$$

Par suite, $\displaystyle\lim_{x\to -k^+} f(x) = \lim_{x\to -k^+} \frac{1}{x+k} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to -k^-} f(x) = \lim_{x\to -k^-} \frac{1}{x+k} = -\infty$.

II.C – Série entière

Q16. D'après l'étude faite en partie I :

$$|(-1)^k\zeta(k+1)| = \zeta(k+1) \xrightarrow[k \longrightarrow +\infty]{} 1$$

Ou encore :

$$|(-1)^k\zeta(k+1)| \underset{+\infty}{\sim} 1$$

Donc le rayon de convergence R est le même que celui de la série $\sum x^n$. On obtient donc $R = 1$.
Si $x = \pm 1$, $|(-1)^k\zeta(k+1)x^k| = \zeta(k+1) \underset{k\to+\infty}{\to} 1$ donc $((-1)^k\zeta(k+1)x^k)$ n'a pas une limite nulle en $+\infty$, donc $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} (-1)^k\zeta(k+1)x^k$ diverge grossièrement.

Q17. Posons comme dans la question **Q10**, $g_n : x \in D_f \mapsto \left(\dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{x}{n(n+x)}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}_f$.
Montrons par récurrence que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g_n^{(k)}(x) = (-1)^k k! \dfrac{1}{(n+x)^{k+1}}$,
Initialisation : pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $g_n^{(1)}(x) = g_n'(x) = -\dfrac{1}{(n+x)^2}$ et $(-1)^1 1! \dfrac{1}{(n+x)^{1+1}} = -\dfrac{1}{(n+x)^2}$. D'où l'initialisation.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée au rang k. Alors, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\begin{aligned} g_n^{(k+1)}(x) &= \left(g_n^{(k)}\right)'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((-1)^k k! \frac{1}{(n+x)^{k+1}}\right) \\ &= (-1)^k k! \frac{-(k+1)}{(n+x)^{k+2}} = (-1)^{k+1}(k+1)! \frac{1}{(n+x)^{k+2}}. \end{aligned}$$

Ce qui la formule recherchée.

Conclusion : D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $g_n^{(k)}(x) = (-1)^k k! \dfrac{1}{(n+x)^{k+1}}$.

Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Soit $[a, b] \subset \mathscr{D}_f$ avec $a < b$. Il existe $n_0 \geq 1$ tel que $n_0 + a > 0$.

- Pour tout $n \geq n_0$, g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b]$.
- $\sum\limits_{n \geq n_0} g_n$ converge simplement sur $[a, b]$ (cf. question **Q10**).
- Pour tout $n \geq n_0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in [a, b], \quad |g_n^{(k)}(x)| = \frac{k!}{(n+x)^{k+1}} \leq \frac{k!}{(n+a)^{k+1}},$$

  donc $\|g_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]} \leq \dfrac{k!}{(n+a)^{k+1}}$. Or, $\sum\limits_{n \geq j+1} \dfrac{k!}{(n+a)^{k+1}}$ converge (car $\dfrac{k!}{(n+a)^{k+1}} = \underset{n \to +\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right)$ avec $k + 1 > 1$), donc, par comparaison, $\sum\limits_{n \geq n_0} \|g_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]}$ converge.

  Comme la convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes, $\sum\limits_{n \geq 1} \|g_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]}$ converge aussi.

  La série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} g_n^{(k)}$ converge donc normalement, donc uniformément, sur $[a, b]$.

D'où $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a, b]$, ceci pour tout $[a, b] \subset \mathscr{D}_f$, donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}_f$ et, pour tout $x \in D_f$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k k! \frac{1}{(n+x)^{k+1}}.$$

Q18. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\left|f^{(k)}(x)\right| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k k! \frac{1}{(n+x)^{k+1}}\right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^k k! \frac{1}{(n+x)^{k+1}}\right| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} k! \frac{1}{(n+x)^{k+1}} \quad (\text{car, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ pour tout } x \in]-1,1[,\ n+x>0) \\
&= k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^{k+1}}\right) \\
&\leq k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)^2}\right) \\
&\qquad (\text{car } \forall x \in]-1,1[, \forall n \geq 2,\ n+x>1, \text{ donc } (n+x)^{k+1} \geq (n+x)^2 \geq (n-1)^2) \\
&= k!\left(\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) \\
&= k!\left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}}\right) \quad \text{en posant } A = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Remarque : Toutes les majorations successives utilisées ici sont justifiables car la série majorante est toujours convergente...

Q19. Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, on a, d'après la formule de Taylor reste intégral, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{1}{j^{k+1}}\right)x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^k \left(\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j^{k+1}}\right) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \zeta(k+1) x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\zeta(k+1)x^k\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leq \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}(n+1)!\left(A+\frac{1}{(t+1)^{n+2}}\right)\mathrm{d}t\right| \quad \text{(positivité et question précédente)}\\
&\leq \left|\int_0^x (n+1)A(x-t)^n dt\right| + \left|\int_0^x (n+1)\frac{(x-t)^n}{(t+1)^{n+2}}\,\mathrm{d}t\right|\\
&\qquad \text{(linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire)}\\
&= \left|\left[-A(x-t)^{n+1}\right]_0^x\right| + \left|\int_0^x (n+1)\frac{1}{(1+t)^2}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n\,\mathrm{d}t\right|\\
&= A|x|^{n+1} + \left|\int_0^x (n+1)\frac{1}{(1+t)^2}\left(\frac{1+x}{1+t}-1\right)^n\,\mathrm{d}t\right|\\
&= A|x|^{n+1} + \left|\left[\frac{1}{1+x}\left(\frac{1+x}{1+t}-1\right)^{n+1}\right]_0^x\right| \quad \text{(intégrande de la forme } u'u^n\text{)}\\
&= A|x|^{n+1} + \left|\frac{1}{x+1}x^{n+1}\right| = A|x|^{n+1} + \frac{|x|^{n+1}}{1+x} = \left(A+\frac{1}{1+x}\right)|x|^{n+1}\\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{car } |x|\in]-1,1[),
\end{aligned}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\zeta(k+1)x^k = 0$.

Donc, pour tout $x\in]-1,1[$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\zeta(k+1)x^k = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\zeta(k+1)x^k = f(x)$.

f est donc bien développable en série entière sur $]-1,1[$ et, pour tout $x\in]-1,1[$, $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\zeta(k+1)x^k$.

II.D - Intégrales

Q20. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, soit $h : t\mapsto \dfrac{t^x-1}{1-t} = \dfrac{\exp(x\ln(t))-1}{1-t}$.

Si $x=0$, h est la fonction nulle sur $]0,1[$, donc $\int_0^1 h(t)dt$ converge

Si $x\neq 0$..

h est continue sur $]0,1[$ par opérations sur les fonctions usuelles.

• $h(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^x-1 = \dfrac{1}{t^{-x}}-1$, donc $\int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $-x<1 \Leftrightarrow x>-1$.

$$h(t) = \frac{\exp(\overbrace{x\ln(t)}^{\to 0})-1}{1-t} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{x\ln t}{1-t} = \frac{x\ln(1+\overbrace{(t-1)}^{\to 0})}{1-t} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{x(t-1)}{1-t} \underset{t\to 1}{\to} -x,$$ donc h est prolongeable par continuité en 1, donc $\int_{1/2}^1 h(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour conclure : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t}\,\mathrm{d}t$ converge donc si et seulement si $x>-1$. *Remarque : Le signe de h étant constant sur* $]0,1[$, *on a l'intégrabilité de h pour tout* $x\in]-1,+\infty[$.

Q21. Soit $x>-1$.

Pour tout $t\in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ (série géométrique de raison $t\in]-1,1[$), donc $h(t)=\dfrac{t^x-1}{1-t}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(t^x-1)t^n$.

Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $h_n : t\in]0,1[\mapsto (t^x-1)t^n = t^{n+x}-t^n$.

Pour tout $t\in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h_n(t)=\frac{t^x-1}{1-t}$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} h_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers $t\mapsto \dfrac{t^x-1}{1-t}$ qui est continue (donc continue par morceaux) sur $]0,1[$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, h_n est continue sur $]0,1[$.

h_n est intégrable sur $]0,1/2]$ comme différence de deux fonctions intégrable (car $t^{n+x}=\dfrac{1}{-n-x}$ avec $-n-x<1$ car $n+x>-1$).

h_n est intégrable sur $[1/2,1[$ car prolongeable par continuité en 1 ($\displaystyle\lim_{t\to 1} h_n(t)=0$).

h_n est donc intégrable sur $]0,1[$.

Si $x\in]-1,0]$, pour tout $t\in]0,1[$, $t^{n+x}\geq t^n$, donc

$$\int_0^1 |h_n(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{n+x}-t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+x+1}-\frac{1}{n+1}.$$

Si $x>0$, pour tout $t\in]0,1[$, $t^{n+x}\leq t^n$, donc

$$\int_0^1 |h_n(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^1 -t^{n+x}+t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+x+1}.$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |h_n(t)|\,\mathrm{d}t=\pm\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x+1}-\frac{1}{n+1}\right)$ converge d'après la question **Q10**

D'où, d'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$\forall x\in]-1,+\infty[,\quad \int_0^1\frac{t^x-1}{1-t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x+1}-\frac{1}{n+1}\right)=f(x).$$

Q22. Posons $h:(x,t)\in]-1,+\infty[\times]0,1[\mapsto \dfrac{t^x-1}{1-t}=\dfrac{\exp(x\ln(t))-1}{1-t}$ et soit $p\in\mathbb{N}^*$.

Pour tout $x>-1$, $t\mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,1[$ d'après la remarque de la question **Q20**.

Pour tout $t\in]0,1[$, $x\mapsto h(x,t)=\dfrac{\exp(x\ln(t))-1}{1-t}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ (exponentielle) et, pour tout $k\in[\![1,p]\!]$,

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)=(\ln t)^k\frac{\exp(x\ln(t))}{1-t}\quad\text{(par récurrence).}$$

Pour tout $x > -1$, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k \dfrac{\exp(x\ln(t))}{1-t}$ est continue (par morceaux) sur $]0,1[$.
Pour tout $[a,b] \subset]-1,+\infty[$ avec $a < b$, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k \frac{t^x}{1-t} \leq |\ln t|^k \frac{t^a}{1-t} = \varphi_k(t)$$

où φ_k est intégrable sur $]0,1[$ car :

- elle est continue sur $]0,1[$; item $\varphi_k(t) \underset{t\to 0}{\sim} |\ln t|^k t^a = o\left(t^{(-1+a)/2}\right)$, donc φ_k est intégrable sur $]0,1/2]$ (car $(1-a)/2 < 1$) ;
- $\varphi_k(t) = (-1)^k(\ln t)^k \dfrac{t^a}{1-t} \underset{t\to 1}{\sim} (-1)^k(\ln(1+(t-1)))^k \dfrac{1}{1-t} \sim (-1)^k \dfrac{(t-1)^k}{1-t} = (-1)^{k-1}(t-1)^{k-1} \underset{t\to 1}{\to} \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}$, donc φ_k est prolongeable par continuité en 1, donc intégrable sur $[1/2,1[$.

La fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{1-t}\,\mathrm{d}t$ est donc de classe $\mathscr{C}^p$ sur $[a,b]$.
Ceci pour tout $[a,b] \subset]-1,+\infty[$, donc f est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $]-1,+\infty[$.
Ceci étant valable pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-1,+\infty[, \quad f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (\ln t)^k \frac{t^x}{1-t}.$$

Comme f est développable en série entière sur $]-1,1[$, son développement est sa série de Taylor et, par unicité du développement en série entière, on a, d'après la question **Q19** et par identification,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (-1)^k \zeta(k+1) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

donc

$$\zeta(k+1) = (-1)^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 (\ln t)^k \frac{1}{1-t} dt$$

d'après l'écriture de $f^{(k)}$ trouvée et en prenant $x = 0$.

Q23. Posons enfin le changement de variable $u = -\ln(t)$.
Ce changement de variable est $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant et réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$.
De plus, $u = -\ln t \Leftrightarrow t = e^{-u}$, donc $\mathrm{d}t = -e^{-u}du$. Par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\zeta(k+1) &= \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 (\ln t)^k \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k}{k!} \int_{+\infty}^0 (-u)^k \frac{1}{1-e^{-u}}(-e^{-u}du) \\
&= \frac{(-1)^k}{k!} \int_{+\infty}^0 (-1)^k u^k \frac{-1}{e^u - 1} du \\
&= \frac{1}{k!} \int_0^{+\infty} \frac{u^k}{e^u - 1} du.
\end{aligned}$$

III Probabilités

III.A - Loi zêta

Q24. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) \geq 0$ (car $\zeta(x) > 1 > 0$)
De plus, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x) n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \zeta(x) = 1$ car $x > 1$ (et donc $\zeta(x)$ existe).

Q25. X admet une espérance finie si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\geq 1} |nP(X = n)| = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{x-1}}$ converge.
On reconnait la série définissant $\zeta(x - 1)$, qui converge si et seulement si $x - 1 > 1 \Leftrightarrow x > 2$.
X admet donc une espérance si et seulement si $x > 2$ et, dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-1}} = \frac{\zeta(x - 1)}{\zeta(x)}.$$

Q26. D'après le théorème de transfert, X^k admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\geq 1} |n^k P(X = n)| = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{x-k}}$ converge.
On reconnait la série définissant $\zeta(x - k)$, qui converge si et seulement si $x - k > 1 \Leftrightarrow x > 1 + k$.
X^k admet donc une espérance si et seulement si $x > 1 + k$ et, dans ce cas, d'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k P(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-k}} = \frac{\zeta(x - k)}{\zeta(x)}.$$

Q27. X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance finie, donc si et seulement si $x > 3$ et, dans ce cas, d'après la formule de König-Huygens,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{\zeta(x - 2)\zeta(x) - \zeta(x - 1)^2}{\zeta(x)^2}.$$

Q28. Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = ka)\right) \quad \text{(par définition de } a\mathbb{N}^*\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ka) \quad \text{(événements incompatibles)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)} \frac{1}{(ak)^x} = \frac{1}{\zeta(x) a^x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \\
&= \frac{1}{\zeta(x) a^x} \zeta(x) \\
&= \frac{1}{a^x}.
\end{aligned}$$

III.B - Mutuelle indépendance

Q29. Pour toute sous famille $(i_1, ..., i_r)$ d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$,

$(X(\omega) \in q_{i_1}\mathbb{N}^*) \cap \ldots \cap (X(\omega) \in q_{i_r}\mathbb{N}^*) \Leftrightarrow (q_{i_1}|X(\omega) \text{ et} \ldots \text{ et } q_{i_r}|X(\omega)) \Leftrightarrow \left(\left(\prod_{j=1}^{r} q_{i_j}\right)|X(\omega)\right)$
d'après le cinquième point d'arithmétique rappelé dans l'énoncé, donc

$$\mathbb{P}((X \in q_{i_1}\mathbb{N}^*) \cap \ldots (X \in q_{i_r}\mathbb{N}^*)) = \mathbb{P}(X \in q_{i_1}...q_{i_r}\mathbb{N}^*) = \frac{1}{(q_{i_1} \ldots q_{i_r})^x}$$

d'après la question **Q28**.
De plus, toujours d'après la question **Q28**,

$$\mathbb{P}(X \in q_{i_1}\mathbb{N}^*) \ldots \mathbb{P}(X \in q_{i_r}\mathbb{N}^*) = \frac{1}{q_{i_1}^x} \ldots \frac{1}{q_{i_r}^x} = \frac{1}{(q_{i_1} \ldots q_{i_r})^x}.$$

On a donc $\mathbb{P}((X \in q_{i_1}\mathbb{N}^*) \cap \ldots (X \in q_{i_r}\mathbb{N}^*)) = \mathbb{P}(X \in q_{i_1}\mathbb{N}^*) \ldots \mathbb{P}(X \in q_{i_r}\mathbb{N}^*)$, et ce pour toute sous-famille de $[\![1, n]\!]$, donc les événements $(X \in q_1\mathbb{N}^*), \ldots, (X \in q_n\mathbb{N}^*)$ sont mutuellement indépendants.

Q30. D'après la propriété de la continuité monotone,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right).$$

Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X(\omega) \notin p_k\mathbb{N}^*) &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, p_k \not| X(\omega) \\
&\Leftrightarrow \forall p \in \mathcal{P}, p \not| X(\omega) \quad (\text{car } \mathcal{P} = \{p_i,\ i \in \mathbb{N}^*\}) \\
&\Leftrightarrow X(\omega) = 1 \quad (\Rightarrow : \text{contraposée du 6ème point rappelé} ; \Leftarrow : \text{évident})
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right) = \mathbb{P}(X = 1).$$

Par suite, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta(x)} &= \mathbb{P}(X = 1) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \notin p_k\mathbb{N}^*) \quad (\text{indépendance admise après la question } \mathbf{Q29}) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(X \in p_k\mathbb{N}^*)) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right) \quad (\text{d'après la question } \mathbf{Q28}).
\end{aligned}$$

III.C - Deux variables indépendantes suivant une loi zêta

Q31. On a

$$\begin{aligned}A &= \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{(X\in p\mathbb{N}^*)\cap(Y\in p\mathbb{N}^*)} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}}((X\notin p\mathbb{N}^*)\cup(Y\notin p\mathbb{N}^*))\\ &= \bigcap_{i=1}^{+\infty}((X\notin p_i\mathbb{N}^*)\cup(Y\notin p_i\mathbb{N}^*)) \quad (\text{car } \mathcal{P}=\{p_i,\ i\in\mathbb{N}^*\})\\ &= \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{i=1}^{n}((X\notin p_i\mathbb{N}^*)\cup(Y\notin p_i\mathbb{N}^*))\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n.\end{aligned}$$

donc, d'après la propriété de la continuité monotone, comme C_n forme une suite décroissante d'événements (évident), on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(C_n) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}((X\notin p_k\mathbb{N}^*)\cup(Y\notin p_k\mathbb{N}^*))\right).$$

Or, on peut démontrer comme à la question **Q29** que les événements $((X\in p_k\mathbb{N}^*)\cap(Y\in p_k\mathbb{N}^*))_{k\in 1..n}$ sont mutuellement indépendants (le résultat final sera au carré), donc leurs complémentaires, $((X\notin p_k\mathbb{N}^*)\cup(Y\notin p_k\mathbb{N}^*))_{k\in 1,..,n}$ sont aussi indépendants, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}((X\notin p_k\mathbb{N}^*)\cup(Y\notin p_k\mathbb{N}^*))\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left((X\notin p_k\mathbb{N}^*)\cup(Y\notin p_k\mathbb{N}^*)\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\mathbb{P}\left((X\in p_k\mathbb{N}^*)\cap(Y\in p_k\mathbb{N}^*)\right)\right) \quad (\text{en passant au complémentaire})\\ &= \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\mathbb{P}(X\in p_k\mathbb{N}^*)P(Y\in p_k\mathbb{N}^*)\right) \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes})\\ &= \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^x}\frac{1}{p_k^x}\right) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^{2x}}\right) = \frac{1}{\zeta(2x)}\\ &\quad (\text{d'après la question } \mathbf{Q30} \text{ avec } 2x>1)\end{aligned}$$

III.D - Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme

Q32. D'après le troisième point admis, pour tout $\omega\in\Omega$,

$$W_n(\omega)\in k\mathbb{N}^* \Leftrightarrow k \mid U_n(\omega)\wedge V_n(\omega) \Leftrightarrow k\mid U_n(\omega) \text{ et } k\mid V_n(\omega),$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_n\in k\mathbb{N}^*) &= \mathbb{P}((U_n\in k\mathbb{N}^*)\cap(V_n\in k\mathbb{N}^*))\\ &= \mathbb{P}(U_n\in k\mathbb{N}^*)P(V_n\in k\mathbb{N}^*) \quad (U_n \text{ et } V_n \text{ indépendantes})\\ &= \mathbb{P}(U_n\in k\mathbb{N}^*)^2 \quad (\text{même loi}).\end{aligned}$$

Or, les entiers j de $[\![1,n]\!]$ vérifiant $k \mid j$ sont les éléments de $k\mathbb{N}^* \cap [\![1,n]\!]$, c'est-à-dire les entiers qui s'écrivent ki avec $i \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $1 \leq ki \leq n \Leftrightarrow 1 \leq i \leq n/k \Leftrightarrow 1 \leq i \leq \lfloor n/k \rfloor$ (car i est un entier).
On a donc $\{j \in [\![1,n]\!] : k \mid j\} = \{ki,\ i \in [\![1, \lfloor n/k \rfloor]\!]\}$.
Enfin, comme $U_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, on obtient :

$$\mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(U_n \in k\mathbb{N}^*)^2 = \left(\frac{\operatorname{Card}\{ki,\ i \in [\![1, \lfloor n/k \rfloor]\!]\}}{\operatorname{Card}[\![1,n]\!]}\right)^2 = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2.$$

Q33. Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^{*2}$, $\lfloor n/k \rfloor \leq n/k$, donc $\dfrac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \leq \dfrac{1}{k}$.
Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \ell_k = \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to+\infty} P(W_n = k) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} P(W_n = k) \quad \text{combinaison linéaire de limites finies)}\\ &= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{m} (W_n = k)\right) \quad \text{(événements incompatibles),}\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \ell_k \leq 1$ comme limite d'une suite de probabilités.
De plus, comme $W_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{m} (W_n = k)\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m+1}^{+\infty} (W_n = k)\right)$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m+1}^{+\infty} (W_n = k)\right) &\leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n = k) \quad \text{(sous-additivité d'une probabilité)}\\ &\leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) \quad \text{(car } (W_n = k) \subset (W_n \in k\mathbb{N}^*))\\ &= \sum_{k=m+1}^{+\infty} \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2 \quad \text{(d'après la question } \mathbf{Q32})\\ &\leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{(d'après le premier point de cette réponse)}\end{aligned}$$

La convergence de la dernière série justifie à posteriori toutes les majorations précédentes
Or, $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ est une série convergente (Riemann et $2 > 1$), donc son reste tend vers 0,

donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $m \geq M$, $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \varepsilon$.

Par suite, pour tout $m \geq M$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m+1}^{+\infty}(W_n = k)\right) \leq \varepsilon$, donc

$$\sum_{k=1}^{m} \ell_k = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{m}(W_n = k)\right) \geq 1 - \varepsilon.$$

En mettant bout à bout la majoration (valable pour tout $m \in \mathbb{N}^*$) et la minoration obtenues pour $\sum_{k=1}^{m} \ell_k$, on obtient bien :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \geq M \Rightarrow 1 - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{m} \ell_k \leq 1.$$

Q34. La question **Q33** implique

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \geq M \Rightarrow 1 - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{m} \ell_k \leq 1 + \varepsilon,$$

et donc $\lim\limits_{m \to +\infty} \sum_{k=1}^{m} \ell_k = 1$.
Par suite, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \ell_k$ converge et vaut 1.
De plus, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) \in [0, 1]$, donc

$$\ell_k = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) \in [0, 1].$$

On a donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \ell_k = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ell_k \geq 0$, donc $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

Q35. • Pour tout $n, k \in {\mathbb{N}^*}^2$,

$$n/k - 1 < \lfloor n/k \rfloor \leq n/k, \text{ donc } \frac{1}{k} - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \leq \frac{1}{k}.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \frac{1}{k}$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} = \frac{1}{k}$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

• On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(W \in k\mathbb{N}^*) &= \lim_{n \to +\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) \quad \text{(propriété admise avec } B = k\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*) \\ &= \frac{1}{k^2} \quad \text{(d'après le premier point de cette réponse)} \\ &= P(X \in k\mathbb{N}^*) \quad \text{où } X \text{ suit une loi zêta de paramètre 2 (cf. } \textbf{Q28}) \end{aligned}$$

D'après la seconde propriété admise, W et X suivent donc la même loi de probabilité.
• On a alors $\ell_1 = \mathbb{P}(W = 1) = \mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{\zeta(2)1^2} = \dfrac{1}{\zeta(2)}$.
Or, $\mathbb{P}(W = k) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(W_n = 1) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(U_n \wedge V_n = 1)$.
Donc, quand n tend vers $+\infty$, la probabilité, quand on prend indépendamment deux nombres au hasard dans $[\![1, n]\!]$ (loi uniforme) que ces deux nombres soient premiers entre eux, tend vers $\dfrac{1}{\zeta(2)} \underset{\text{culture}}{=} \dfrac{1}{\pi^2/6} = \dfrac{6}{\pi^2}$.