DS-6 CCINP
12 février 2020
Durée : 4h

I D'après EPITA 2004

On note E l'espace vectoriel $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{K})$ et on le munit de la norme $\| \ \|_\infty$ définie pour $\varphi \in \mathrm{E}$ par :

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} \{|\varphi(x)|\}$$

Dans ce problème, on se propose d'étudier les équations intégrales de Volterra qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\forall x \in [0,1],\ y(x) - \int_0^x k(x,t)y(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \qquad (V)$$

où les fonctions k et f sont données et continues respectivement sur $[0,1]^2$ et $[0,1]$ et y est l'inconnue : une fonction continue sur $[0,1]$. On a donc f et y éléments de E.
On désigne par K et M les maxima des fonctions $|k|$ et $|f|$ sur $[0,1]^2$ et $[0,1]$ respectivement. On a notamment $M = \|f\|_\infty$.

Partie A Un endomorphisme

Pour $\varphi \in \mathrm{E}$, on définit $A(\varphi)$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ A(\varphi)(x) = \int_0^x k(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $\varphi \in \mathrm{E}$. Pour simplifier, on notera, *dans cette question*, θ la fonction définie par $\theta = A(\varphi)$.
   a) Justifier que pour $x \in [0,1]$,
   $$\theta(x) = x\int_0^1 k(x,xs)\varphi(xs)\,\mathrm{d}s.$$
   b) En déduire que θ est un élément de E et déterminer la norme de θ en fonction de celle de φ.
2. Justifier que A est un endomorphisme de E.
3. Soit $\varphi \in \mathrm{E}$. On introduit la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :
   $$\psi_0 = \varphi,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \psi_{n+1} = A(\psi_n)$$
   En d'autres termes $\psi_n = A^n(\varphi)$.
   a) Justifier rapidement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ψ_n est continue sur $[0,1]$

b) Montrer par récurrence l'inégalité suivante pour $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$:

$$\left|\psi_n(x)\right| \leq \|\varphi\|_\infty \frac{(Kx)^n}{n!}.$$

c) Que peut-on en déduire pour $\|\psi_n\|_\infty$?

d) En déduire que la fonction définie par $\Psi = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n$ est continue sur $[0,1]$.

Partie B Un exemple

Ici on considère le cas particulier $k(x,t) = x - t$ et $f(x) = x$. On cherche donc à résoudre :

$$\forall x \in [0,1],\ y(x) - \int_0^x (x-t)y(t)\,\mathrm{d}t = x \qquad (V_1)$$

1. Soit g une solution[1] de (V_1).
   a) Montrer que g est solution de (V_1) si et seulement si :

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) = x\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t + x$$

   b) En déduire que g est $\mathscr{C}^1$ et calculer $g'(x)$.
   c) En déduire que g est $\mathscr{C}^2$ et est solution de $y'' - y = 0$.
   d) En déduire la forme de g.
   e) Que valent $g(0)$ et $g'(0)$?
2. Montrer que la seule solution de (V_1) est la fonction sh.

Partie C Existence et unicité des solutions

On revient au cas général.
On considère la suite de fonctions $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = f,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = \int_0^x k(x,t)u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = A(u_n)$. On sait déjà que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et que sa somme U est continue sur $[0,1]$.

1. a) Fixons $x \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$, on pose $v_n(t) = k(x,t)u_n(t)$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge normalement sur $[0,1]$.
   b) Exprimer l'intégrale $\int_0^x k(x,t)U(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de $U(x)$ et de $f(x)$.
2. En déduire que U est solution de l'équation (V).

[1] C'est donc une fonction continue sur $[0,1]$.

On considère V_1 et V_2 deux solutions de (V) et on note $d = V_1 - V_2$.

3. Montrer que d est solution de l'équation intégrale[2]

$$\forall x \in [0,1],\ y(x) - \int_0^x k(x,t)y(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{V_0}$$

4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, l'inégalité :

$$\left|d(x)\right| \leq D\frac{K^n}{n!}$$

où D est le maximum sur $[0,1]$ de la fonction continue $|d|$.

5. En déduire que (V) a une unique solution.

II D'après CCP PC 2017

Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère un automate qui génère successivement les lettres C ou P jusqu'à obtenir une certaine séquence prédéfinie.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'automate génère la n^{e} lettre à l'instant n de façon indépendante de toutes les générations précédentes. On suppose également qu'à chaque génération, les lettres P et C ont des probabilités p et q (respectivement) d'être générées.
Suivant les parties considérées, on définit différents niveaux que l'automate peut atteindre.
On considère dans tous les cas que l'automate est initialement au niveau 0. On se propose alors d'étudier essentiellement l'existence de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire correspondant au temps d'attente de la séquence prédéfinie à travers sa fonction génératrice.
Pour cette étude probabiliste, on mobilise diverses propriétés analytiques (surtout sur les séries entières).
Dans les parties **I** et **III**, on examine le temps d'attente pour les séquences C puis CC. La partie **II** est indépendante de la partie **I** et traite de questions préliminaires sur les séries entières qui seront investies dans les parties **III**. La partie **III** ne dépend de la partie **I** que par la question **Q4** et de la partie **II** que par la question **Q10**.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'évènement « l'automate génère la lettre P à l'instant n » et C_n l'évènement « l'automate génère la lettre C à l'instant n ».

Partie I - étude d'un cas simple

Dans cette partie, on dit que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 dès qu'il génère la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors il reste au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 1. On résume l'expérience par la figure 1 suivante :

[2] L'équation sans second membre associée à (V) ?

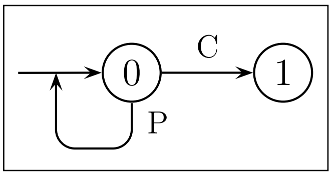

FIGURE 1 – Attente de C

On note Y l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 1. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. On note G_Y la fonction génératrice de Y et R_Y son rayon de convergence. On sait alors que $R_Y \geqslant 1$ et que :

$$\forall t \in]-R_Y, R_Y[,\ G_Y(t) = \mathbb{E}(t^Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n)t^n.$$

Q1. Reconnaître la loi de Y et préciser en particulier $\mathbb{P}(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q2. Montrer que $R_Y = \dfrac{1}{p} > 1$ et que : $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{p}\right[,\ G_Y(t) = \dfrac{qt}{1-pt}$.

Q3. Montrer que G_Y est 2 fois dérivable en 1 et que $G'(1) = \dfrac{1}{q}$ et $G''(1) = \dfrac{2p}{q^2}$.

Q4. Donner les valeurs de $\mathbb{E}(Y)$ et de $\mathbb{V}(Y)$.

Partie II - Séries entières

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\dfrac{1}{a^{n+1}}$

Q5. Montrer que $\sum u_n(a)z^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à $|a|$.

Q6. Montrer que si $|z| < |a|$, on a : $\dfrac{1}{z-a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)z^n$.

Soit a, b et λ des nombres complexes non nuls. Dans les questions **Q7** à **Q10**, on suppose que
$|a| < |b|$. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(a)u_{n-k}(b)$ et pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, $f(t) = \dfrac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)}$.

Q7. Montrer que l'on a :

$$v_n = \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right)$$

Q8. Trouver un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$.

Q9. En déduire que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est égal à $|b|$ et que si $|z| < |a|$, alors
$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n.$$

Q10. Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_f tel que $R_f = |a|$.

Partie III - étude d'un cas intermédiaire

Dans cette partie, on suppose que l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 en générant la lettre C. De même, l'automate passe du niveau 1 au niveau 2 en générant la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors qu'il est au niveau 0 ou 1, il retombe au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 2, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CC. On résume l'expérience par la figure 2 suivante :

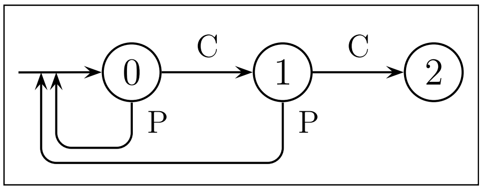

Figure 2 – Attente de CC

On note Z l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 2. Ainsi Z est le temps d'attente de la séquence CC.
On admet que Z est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ telle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathbb{P}(Z = n)$. On note G_Z la fonction génératrice de Z et R_Z son rayon de convergence. On rappelle que $R_Z \geqslant 1$.

Q11. Calculer p_1, p_2 et p_3.

Q12. Justifier que $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$ est un système complet d'évènements.

Q13. En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, on a : $p_n = pp_{n-1} + pqp_{n-2}$.

Q14. En déduire que pour tout $t \in [-1, 1]$, on a : $G_Z(t)(1 - pt - pqt^2) = q^2t^2$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $Q(t) = 1 - pt - pqt^2$, $\Delta = p^2 + 4pq > 0$, $a = \dfrac{\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$ et $b = \dfrac{-\sqrt{\Delta} - p}{2pq}$.

Q15. Montrer que $Q(-1) = 1 + p^2 > 0$ et que $Q(1) = q^2 > 0$.

Q16. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) = -pq(t - a)(t - b)$.

Q17. Montrer que $1 < |a| < |b|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on définit $f(t) = \dfrac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

Q18. Montrer à l'aide de la question **Q10** que f est développable en série entière au voisinage de 0, que sa série entière associée est G_Z et que $R_Z = |a|$.

Q19. Montrer que, pour tout $t \in]-|a|, |a|[$, on a : $G_Z(t) = \dfrac{q^2t^2}{1 - pt - pqt^2}$.

Q20. Montrer que Z admet une espérance et une variance puis que $\mathbb{E}(Z) = q^{-1} + q^{-2}$.

Q21. Vérifier, à l'aide des questions **Q4** et **Q20**, que $\mathbb{E}(Z) \geqslant \mathbb{E}(Y)+1$ où Y est la variable aléatoire définie en partie **I**.

Q22. Pouvait-on prévoir ce résultat ?