DS-6-CCINP — Corrigé

I D'après EPITA 2004 [/19]

Partie A Un endomorphisme [/7]

[0,5] 1. a) On effectue le changement de variables $t = xs$.

[1,5] b) On va appliquer le théorème de continuité d'une intégrale à $x \longmapsto \int_0^1 k(x, xs)\varphi(xs)\,\mathrm{d}s$, en posant $u(x, s) = k(x, xs)\varphi(xs)$. On a :

- Pour tout $x \in [0, 1]$, $s \longmapsto u(x, s)$ est continue (par morceaux) sur le segment $[0, 1]$ et est donc intégrable.
- Pour tout $s \in [0, 1]$, $x \longmapsto u(x, s)$ est continue sur $[0, 1]$ par composition et produit.
- La fonction φ est continue sur le segment $[0, 1]$ et y est donc bornée. On a alors :

$$\forall (x, t) \in [0, 1]^2,\ |u(x, s)| = |k(x, xs)\varphi(xs)| \leq K \|\varphi\|_\infty = B$$

La fonction $s \longmapsto B$ est intégrable sur le segment $[0, 1]$.

En utilisant le théorème ad-hoc, la fonction $x \longmapsto \int_0^1 k(x, xs)\varphi(xs)\,\mathrm{d}s$ est continue sur $[0, 1]$.

Par produit, la fonction θ est donc continue sur $[0, 1]$: c'est donc un élément de E.

[0,5] On a clairement :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0, 1],\ |\theta(x)| &\leq |x| \int_0^1 |k(x, xs)||\varphi(xs)|\,\mathrm{d}s \\ &\leq |x| \int_0^1 K \|\varphi\|_\infty\,\mathrm{d}s \\ &\leq K \|\varphi\|_\infty .\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\|\theta\|_\infty \leq K \|\varphi\|_\infty$$

[1] 2. La linéarité de A provient de celle de l'intégrale et la partie « endo » a été vue au 1.

[0,5] 3. a) Le 1.b a montré que A est un endomorphisme de E. Il en est de même pour A^n. Comme $\psi_n = A^n(\varphi)$, on a bien ψ_n continue sur $[0, 1]$.

[1] b) Procédons par récurrence comme demandé.

Initialisation On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1],\ |\psi_1(x)| &\leq \int_0^x |k(x,t)||u_0(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^x |k(x,t)||\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^x K\,\|\varphi\|_\infty\,\mathrm{d}t \\ &\leq K\,\|\varphi\|_\infty\,x = \|\varphi\|_\infty \frac{(Kx)^1}{1!}.\end{aligned}$$

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ (arbitraire). Si pour tout $x \in [0,1]$, $|\psi_n(x)| \leq \|\varphi\|_\infty \dfrac{(Kx)^n}{n!}$ alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1],\ |\psi_{n+1}(x)| &\leq \int_0^x |k(x,t)||\psi_n(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^x K\cdot\|\varphi\|_\infty \frac{(Kt)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &\leq K^{n+1}\cdot\|\varphi\|_\infty\cdot\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)\cdot n!}\right]_0^x \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \frac{(Kx)^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

c) On a donc $\|\psi_n\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \dfrac{K^n}{n!}$. [0,5]

d) La série (exponentielle) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi\|_\infty \dfrac{K^n}{n!}$ converge. Donc par comparaison par $\leq$ de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\psi_n\|_\infty$ converge. [1,5]

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, ψ_n est continue sur $[0,1]$ et que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \psi_n$ converge normalement sur $[0,1]$, la somme $\Psi = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n$ est définie et continue sur $[0,1]$.

Partie B Un exemple [/6]

1. a) On utilise la linéarité de l'intégrale ! [1]

b) Le membre de droite dans l'expression trouvée à la question précédente est une combinaison de primitives de fonctions continues et est donc $\mathscr{C}^1$. De plus : [1]

$$\forall x \in [0,1],\ g'(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + xg(x) - xg(x) + 1 = 1 + \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

c) Avec le même argument qu'au b) la fonction g' est $\mathscr{C}^1$ et $g''(x) = g(x)$. [1]

d) Cours de première année ! La fonction g est donc de la forme $g(x) = Ae^x + Be^{-x}$ où A et B sont deux constantes réelles arbitraires. [1]

[1] e) En utilisant le a et b, on a $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.

[1] 2. On vient de voir que si g est solution de (V_1) alors $g(x) = Ae^x + Be^{-x}$. Un calcul donne alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1],\ \int_0^1 (x-t)g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x (x-t)\Big(Ae^t + Be^{-t}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= Ae^x - Ax + Bx - A - B + Be^{-x} \\ &= g(x) + (B-A)x - (A+B)\end{aligned}$$

Donc g est solution de (V_1) si et seulement si $A - B = 1$ et $A + B = 0$ ce qui donne $(A,B) = (1/2, -1/2)$ et donc $g = \mathrm{sh}$.

Partie C Existence et unicité de solutions [/6]

[1] 1. a) Comme demandé, fixons x et posons $v_n(t) = k(x,t)u_n(t)$. Chacune des fonctions v_n est continue sur $[0,1]$. De plus, on a $\|v_n\|_\infty \leq K\|u_n\|_\infty$. Comme la série $\sum u_n$ converge normalement, il en est alors de même pour $\sum v_n$.

[1,5] b) On peut alors appliquer le théorème d'intégration des sommes de séries normalement convergentes pour obtenir, pour $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\int_0^x k(x,t)U(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} k(x,t)u_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x v_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x k(x,t)u_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}(x) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x) \\ &= U(x) - u_0(x) \\ &= U(x) - f(x)\end{aligned}$$

[0,5] 2. On a donc bien

$$\forall x \in [0,1],\ U(x) - \int_0^x k(x,t)U(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

C'est-à-dire U est solution de (V).

3. Calculons [1]

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1],\ d(x) &= V_1(x) - V_2(x)\\ &= \int_0^x k(x,t)V_1(t)\,\mathrm{d}t + f(x) - \left(\int_0^x k(x,t)V_2(t)\,\mathrm{d}t + f(x)\right)\\ &= \int_0^x k(x,t)\Big(V_1(t) - V_2(t)\Big)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^x k(x,t)d(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Donc d est solution de (V_0).

4. Notons $w_0 = d$, puis pour tout n et tout $x \in [0,1]$, [1]

$$w_{n+1}(x) = \int_0^x k(x,t)w_n(x)\,\mathrm{d}t$$

En utilisant le A.3.b, on obtient la majoration $|w_n(x)| \leq D\dfrac{(Kx)^n}{n!}$. Ensuite, la question précédente montre que pour tout n, $w_n = d$.

5. Comme la série $\sum \dfrac{(Kx)^n}{n!}$ converge, son terme général tend vers 0 et donc on a $d(x) = 0$. [1]
Les fonctions V_1 et V_2 sont donc égales : la solution est unique.

II D'après CCP PC 2017 [/]

Partie I – Étude d'un cas simple [/]

Ici il s'agit de redémontrer le cours !

Q1. Y est le rang du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli **indépendantes** : cette variable aléatoire suit donc une loi géométrique de paramètre q (la probabilité de générer C). []

$$Y \hookrightarrow \mathscr{G}(q)$$

Q2. La série génératrice de Y est donc $\sum_{n\geq 1} qp^{n-1}t^n$, de rayon de convergence $1/p > 1$. La somme de cette série vaut $G_Y(t) = qt\sum_{n=1}^{+\infty}(pt)^{n-1} = qt\sum_{m=0}^{+\infty}(pt)^m = qt\dfrac{1}{1-pt}$, et ainsi : []

$$R_Y = \frac{1}{p} > 1 \text{ et } \forall t \in]-1/p, 1/p[,\ G_Y(t) = \frac{qt}{1-pt}$$

Puisque le rapport du jury en parle, précisons que $0 < p < 1$*, ce qui justifie* $\dfrac{1}{p} > 1$*...*

Q3. En tant que somme de série entière, on sait que G_Y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, les dérivées se calculant en dérivant terme à terme. Comme $R_Y > 1$: G_Y est deux fois dérivable en 1. []

Comme de plus pour tout $t \in]-1/p, 1/p[$, $G_Y'(t) = \dfrac{q}{(1-pt)^2}$ puis $G_Y''(t) = \dfrac{2pq}{(1-pt)^3}$, on a donc : $G_Y'(1) = \dfrac{1}{q}$ et $G_Y''(1) = \dfrac{2p}{q^2}$·.

[] **Q4.** On a : $\mathbb{E}(Y) = G_Y'(1) = \dfrac{1}{q}$ et $\mathbb{V}(Y) = G_Y''(1) + G_Y'(1) - G_Y'(1)^2 = \dfrac{p}{q^2}$·.
Et si on connaît son cours (ou qu'on ouvre le poly...), on retrouve bien l'expression connue des espérances et variance d'une géométrique (attention, ici q joue le rôle usuel de p...). Le rapport du jury laisse penser qu'on pouvait/devait parachuter les formules.

Partie II – Séries entières [/]

[] **Q5.** On est à nouveau face à une série entière géométrique de raison $1/a$; le cours nous donne son rayon de convergence : le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(-\dfrac{1}{a^{n+1}}\right) z^n$ vaut $|a|$.

[] **Q6.** Pour $|z| < |a|$, notre fine connaissance des séries géométriques nous donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{a^{n+1}}\right) z^n = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - z/a},$$

soit encore, comme annoncé :

$$\text{Pour } |z| < |a| : \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{a^{n+1}}\right) z^n = \frac{1}{z-a}.$$

[] **Q7.** Il va essentiellement falloir sommer des termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{b}{a} \neq 1$:

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a^{k+1}} \cdot \frac{1}{b^{n+1-k}} \\ &= \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k \\ &= \frac{1}{ab^{n+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}}, \end{aligned}$$

soit après une dernière agitation de termes :

$$v_n = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right)$$

[] **Q8.** On a $|a| < |b|$, donc $\dfrac{1}{|a|} > \dfrac{1}{|b|}$, donc $\left(\dfrac{1}{b}\right)^{n+1} = o\left(\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n+1}\right)$, donc : $v_n \sim \dfrac{1}{(b-a)a^{n+1}}$.

Q9. Pour $r > 0$, on a $(v_n r^n)$ bornée si et seulement si $\left(\dfrac{1}{a(b-a)} \cdot \left(\dfrac{r}{a}\right)^n\right)$ l'est, c'est-à-dire ssi $r \leq |a|$: le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ vaut $|a|$. []
Pour $|z| < |a|$, les séries $\sum u_n(a) z^n$ et $\sum v_n(a) z^n$ sont absolument convergentes, donc leur produit de Cauchy également, la somme du produit étant égal au produit des sommes des deux séries :

$$\text{Pour } |z| < |a|,\ \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$$

Q10. Pour $t \in]-a, a[$, on a $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n t^{n+2} = \sum_{k=2}^{+\infty} v_{k-2} t^k$: il s'agit bien d'un développement en série entière... et le rayon de convergence de la série associée est le même que celui de $\sum v_n z^n$. *cqfd.* []

Partie III – Étude d'un cas intermédiaire [/]

Q11. Bien entendu, $p_1 = 0$. Ensuite, $p_2 = \mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_2)$ (indépendance) donc $p_2 = q^2$. Enfin, la seule possibilité pour avoir $Z = 3$ est que les trois premières lettres soient PCC, donc toujours par indépendance : $p_3 = \mathbb{P}(P_1 \cap C_2 \cap C_3) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}(C_3) = pq^2$. []

Q12. D'une part (P_1, C_1) est complet (deux événements disjoints, de réunion Ω), et d'autre part $C_1 = (C_1 \cap P_2) \cup (C_1 \cap C_2)$, l'union étant disjointe. Ainsi $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$ est un système complet d'événements. []

Q13. La formule des probabilités totales (pour le système complet d'événements précédent) nous donne : []

$$p_n = \mathbb{P}(Z=n) = \mathbb{P}_{P_1}(Z=n)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}_{C_1P_2}(Z=n)\mathbb{P}(C_1P_2) + \mathbb{P}_{C_1C_2}(Z=n)\mathbb{P}(C_1C_2)$$

- Si les deux premières lettres sont C_1C_2, alors $Z = 2$ donc $Z \neq n$: $\mathbb{P}_{C_1C_2}(Z = n) = 0$.
- Si maintenant la première lettre est P_1, alors l'automate est dans l'état zéro, donc la probabilité pour que $n-1$ lettres plus tard il soit dans l'état 2 vaut $\mathbb{P}(Z = n-1)$: $\mathbb{P}_{P_1}(Z = n) = \mathbb{P}(Z = n-1) = p_{n-1}$.
- De même, $\mathbb{P}_{C_1P_2}(Z = n) = \mathbb{P}(Z = n-2)$ (si après 2 lettres on est dans l'état 0, la probabilité de se retrouver dans l'état 2 après les $n-2$ lettres suivantes est $\mathbb{P}(Z = n-2) = p_{n-2}$). Enfin, $\mathbb{P}(P_1) = p$ et par indépendance, $\mathbb{P}(C_1P_2) = \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(P_2) = pq$.

Ainsi : pour tout $n \geq 3$, $p_n = p\, p_{n-1} + pq\, p_{n-2}$.
On se rassure en regardant les trois premiers termes de la suite, bien entendu...

Q14. On fixe $t \in [-1, 1]$ et on multiplie la relation précédente par t^n, puis on somme pour $n \geq 3$: les séries en jeu sont toutes absolument convergentes (les termes généraux []

sont positifs et majorés par $p_n = \mathbb{P}(Z = n)$, terme général d'une série absolument convergente). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{+\infty} p_n t^n &= pt \sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-1} t^{n-1} + t^2 pq \sum_{n=3}^{+\infty} p_{n-2} t^{n-2} \\ &= pt \sum_{i=2}^{+\infty} p_i t^i + t^2 pq \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n \\ &= pt \cdot (G_Z(t) - p_1 t) + t^2 pq G_Z(t)) \\ &= (pt + pqt^2) G_Z(t)\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} p_n t^n = G_Z(t) - (p_1 t + p_2 t^2) = G_Z(t) - q^2 t^2$, ce qui fait qu'on obtient bien :

$$\forall t \in [-1, 1],\ (1 - pt - pqt^2) G_Z(t) = q^2 t^2.$$

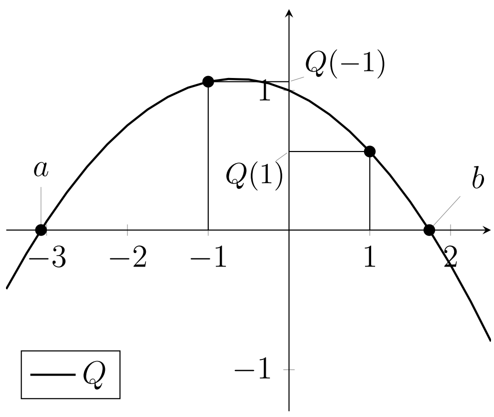
[] **Q15.** Pfff... une de ces nombreuses questions élémentaires un peu usantes[1]. On a :

$$\begin{aligned}Q(-1) = 1 + p - pq = 1 + p - p(1-p) = 1 + p^2 > 0 \\ Q(1) = 1 - p - pq = q - pq = q(1-p) = q^2 > 0\end{aligned}$$

Ces résultats seront utiles... deux questions plus loin, pour localiser les racines de Q...

[] **Q16.** Le polynôme $Q = 1 - pX - pqX^2$ est de degré 2, coefficient dominant $-pq$ et possède deux racines distinctes a et b : on peut donc le factoriser sous la forme $Q = -pq(X-a)(X-b)$.

[] **Q17.** *J'avais d'abord abordé cette question par un calcul absurde... avant de prendre 15cm de recul sur l'énoncé...* Un petit dessin[2] pour voir (ici $p = 0{,}25$)



L'application Q vérifie $Q(1) > 0$, $Q(-1) > 0$, $Q(t) \xrightarrow[t \longrightarrow \pm\infty]{} -\infty$ (terme dominant) et est **continue**, donc le théorème des valeurs intermédiaires[3] nous assure qu'elle possède une racine dans $]-\infty, -1[$. De même, elle possède une racine dans $]1, +\infty[$. Par

[1] Celles ou il y a ceux qui savent faire et...
[2] Un croquis est toujours bienvenu : c'est un bon moyen de faire comprendre ce qui se passe...
[3] Enfin... une extension.

ailleurs, les deux racines de Q sont a et b avec $b < a$, donc : $b < -1 < 0 < 1 < a$. Ensuite :

$$|b| = -b = \frac{\sqrt{\Delta}+p}{2pq} > \frac{\sqrt{\Delta}-p}{2pq} = a = |a| > 1.$$

Q18. D'après les questions précédentes, $f(t) = \dfrac{-\frac{q}{p}t^2}{(t-a)(t-b)}$, et la question refq10 s'applique avec $\lambda = -\dfrac{q}{p}$ (la condition $|a| < |b|$ étant bien vérifiée). []

Q19. Ici une question intéressante et fine[4]. Ce qu'on a montré dans ce qui précède, c'est que la relation $G_Z(t) = \dfrac{q^2t}{1-pt-pqt^2}$ est valable pour $t \in [1,1]$, et il s'agit donc de l'étendre à $]-|a|,|a|[$. Or on a ici : []

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n t^n$$

(notations de la deuxième partie), donc **par unicité du développement en série entière**, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = v_n$. La relation s'étend alors bien à $]-|a|,|a|[$.

Q20. Une somme de série entière de rayon de convergence $R > 0$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. Or ici, $R_Z = |a| > 1$, donc G_Z est deux fois dérivable en 1, donc : Z possède une espérance et une variance. []
Il reste à calculer $\mathbb{E}(Z) = G_Z'(1)$. Ici :

$$\forall t \in]-R_Z,R_Z[, \qquad G_Z'(t) = \frac{2tq^2(1-pt-pqt^2)+q^2t^2(p+2pqt)}{(1-pt-pqt^2)^2}.$$

Pour évaluer en 1 on se souvient que $1-p-pq = Q(1) = q^2$ (question **Q15**), donc :

$$\mathbb{E}(Z) = 2 + \frac{p}{q^2} + 2\frac{p}{q} = 2 + \frac{1-q}{q^2} + 2\frac{1-q}{q} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q}.$$

Q21. Il s'agit d'établir : $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q^2} \geq 1 + \dfrac{p}{q^2}$, soit encore : $q+1 \geq q^2+p = q^2+1-q$, ou encore $q^2 \leq 2q$, c'est-à-dire $q \leq 2$. Cette dernière inégalité est vérifiée, et on a travaillé par équivalence (de l'importance du choix des mots quand on rédige...), ce qui prouve l'inégalité demandée. []

Q22. La première occurrence de CC est évidemment **strictement** précédée par la première occurrence de C, donc on a toujours $Z \geq Y+1$. Par croissance de l'espérance, on on déduit : $\mathrm{E}(Z) \geq 1 + \mathrm{E}(Y)$. Conclusion : *Ben oui, c'était attendu !* []

[4]la façon dont le rapport du jury passe dessus négligemment me surprend...