DS-4 (Mines)
11 décembre 2019
durée : 4h

Soit une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels. On lui associe la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ *i.e.* pour tout n entier naturel, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et les fonctions f_u, F_u, g_u, G_u de la variable réelle définies par :

$$f_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n, \quad F_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n x^n, \quad g_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^n}{n!}, \quad G_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \frac{x^n}{n!}$$

- On dit que la suite (u_n) est A-sommable[1] si la fonction f_u est définie au moins sur l'intervalle $]-1,1[$ et si $f_u(x)$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures. On note alors $S_A(u) = \lim_{x\to 1^-} f_u(x)$.
- On dit que la suite (u_n) est B-sommable[2] si la fonction G_u est définie sur $\mathbb{R}$ et si $e^{-x}G_u(x)$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$. On note alors $S_B(u) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}G_u(x)$.
- On dit que la suite (u_n) est B'-sommable si la fonction g_u est définie sur $\mathbb{R}$ et si $\int_0^x e^{-t}g_u(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$. On note alors $S_{B'}(u) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}g_u(t)\,\mathrm{d}t$.

I Exemples

1. Soit a un réel non nul. On considère la suite (u_n) telle que $u_n = a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Pour quelles valeurs de a la suite (u_n) est-elle A-sommable ? Préciser alors la valeur de $S_A(u)$.
   b) Pour quelles valeurs de a la suite (u_n) est-elle B-sommable ? Préciser alors la valeur de $S_B(u)$.
   c) Pour quelles valeurs de a la suite (u_n) est-elle B'-sommable ? Préciser alors la valeur de $S_{B'}(u)$.
2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = (-1)^n n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) La suite (u_n) est-elle A-sommable ? Si oui, préciser $S_A(u)$.
   b) La suite (u_n) est-elle B'-sommable ? Si oui, préciser $S_{B'}(u)$.

[1] Ici A=Abel.
[2] Pour celle-ci, et la suivante, B=Borel.

II Un résultat abélien

3. On suppose que la suite (u_n) est bornée. Montrer que les fonctions f_u et F_u sont définies au moins sur $]-1,1[$ et déterminer le domaine de définition des fonctions g_u et G_u. (*Attention : les hypothèses faites sur la suite* (u_n) *ne permettent absolument pas d'envisager l'utilisation de la règle de d'Alembert*)

4. On suppose, dans cette question seulement, que la série entière $\sum u_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 1$. Montrer que la suite (u_n) est A-sommable et comparer $S_A(u)$ et $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Dans le reste du devoir, on suppose $R = 1$.

5. Dans cette question, on suppose que la série $\sum u_n$ est convergente et on pose $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
   a) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(U_n - U)x^n = f_u(x) - U$$

   on justifiera en particulier avec soin l'existence des deux membres de cette égalité.

   b) Soit ε un réel strictement positif. Justifier l'existence d'un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|U_n - U| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,

$$|f_u(x) - U| \leq (1-x)C + \frac{\varepsilon}{2}$$

   où $C = \sum_{n=0}^{n_0} |U_n - U|$. En déduire que (u_n) est A-sommable et que $S_A(u) = U$ (*on veillera à ne pas bâcler la fin du raisonnement et, en particulier, à garder* ε *jusqu'au bout*)

III Un résultat tauberien

Soit a une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que $a(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{=} o(1/t)$.

6. Justifier que pour tout $y > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-yt} a(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

Désormais on pose, pour $y > 0$:

$$j(y) = \int_0^y a(t)\,\mathrm{d}t$$
$$J(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yt} a(t)\,\mathrm{d}t$$

7. a) Montrer que la fonction J est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Déterminer, si elle existe la limite en $+\infty$ de J.

On pose, pour $y > 0$:

$$j\left(\frac{1}{y}\right) - J(y) = \underbrace{\int_0^{1/y} (1 - e^{-yt}) a(t)\,\mathrm{d}t}_{P(y)} + Q(y)$$

8. a) Justifier que pour tout $u \geq 0$, $0 \leq 1 - e^{-u} \leq u$.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   b) Après avoir justifié qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $|ta(t)| \leq \varepsilon/2$, montrer que :
   $$\forall y < \frac{1}{A},\ \left|\int_A^{1/y} (1 - e^{-yt}) a(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left(\frac{1}{y} - A\right) \cdot y \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$
   c) Justifier qu'il existe $M > 0$ (qui dépend de A et a) tel que
   $$\left|\int_0^A (1 - e^{-yt}) a(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq My$$
   d) En déduire :
   $$\exists B > 0, \quad y \in]0, B] \Rightarrow |P(y)| \leq \varepsilon$$
9. a) Justifier que $t \longmapsto ta(t)$ est bornée sur $[1, +\infty[$.
   b) Montrer que :
   $$\int_1^{+\infty} e^{-u} \frac{1}{y} a\left(\frac{u}{y}\right) \mathrm{d}u \xrightarrow[y \longrightarrow 0^+]{} 0$$
   On pourra être amené à utiliser la fonction h définie par :
   $$\forall (y, u) \in [0, +\infty[\times [1, +\infty[,\ h(y, u) = \begin{cases} e^{-u} \frac{1}{y} a\left(\frac{u}{y}\right) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

10. a) Déduire des questions précédentes que :
   $$j\left(\frac{1}{y}\right) - J(y) \xrightarrow[y \longrightarrow 0^+]{} 0$$

b) En déduire que si J a une limite en 0 alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} a(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Quelle est la valeur de l'intégrale ?

11. Soit (u_n) une suite. En considérant la fonction a, en escaliers, définie par : si $t \in [k, k{+}1]$, pour $k \in \mathbb{N}$, alors $a(t) = u_k$, montrer que si u est A-sommable et si $u_n = o(1/n)$ alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et sa somme U vaut $U = S_A(u)$.

On aura ainsi établi une réciproque partielle[3] *au résultat trouvé à la question 5.*

IV Lien entre B et B'-sommabilité

12. Montrer, de même qu'en question 5, que si la série $\sum u_n$ est convergente, la suite (u_n) est B-sommable et que $S_B(u) = U = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

13. Donner un exemple d'une suite (u_n) qui soit B'-sommable et telle que la série $\sum u_n$ soit divergente.

14. Dans cette question, on suppose que la série $\sum u_n$ est convergente et on pose $U = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On pose

$$U_{-1} = 0 \text{ et } B(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_{n-1}x^n}{n!}$$

a) Montrer que B est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $B(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} g_u(t)\,\mathrm{d}t$

c) En déduire que (u_n) est B'-sommable et que $S_{B'}(u) = U$.

On suppose à nouveau que la suite u est bornée.

15. Justifier que g_u et G_u sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

16. a) Exprimer G'_u à l'aide de G_u et g_u.

b) Calculer la dérivée de $x \longmapsto e^{-x}G_u(x)$ en fonction de g'_u, puis en déduire que :

$$e^{-x}G_u(x) - G_u(0) = e^{-x}g_u(x) - g_u(0) + \int_0^x e^{-t}g_u(t)\,\mathrm{d}t$$

17. On suppose que $g_u \underset{+\infty}{=} o(e^x)$. Montrer que u est B-sommable si et seulement si elle est B'-sommable et que dans ce cas on a $S_B(u) = S_{B'}(u)$.

[3] Ce théorème est du à Alfred Tauber (1866–1942) qui l'a démontré en 1897. Le mathématicien Anglais G. H. Hardy a, à partir de 1913 rendu populaire ce théorème et toute une catégorie de théorèmes similaires, qu'il a nommé « théorèmes tauberiens ». La démonstration du III est celle donnée par Hardy dans son ouvrage de 1949 : « Divergent Series ».