DS-4 Sujet Mines
Corrigé

I Exemples

1. a) La série $\sum a^n x^n$ converge ssi $|ax| < 1$. Son rayon de convergence est donc $1/|a|$. Pour pouvoir parler de A-sommabilité il est donc nécessaire que $|a| \leq 1$. Pour $|x| < 1$, on a $f_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n x^n = \dfrac{1}{1-ax}$. Donc f_u n'a de limite en 1^- que ssi $|a| \leq 1$ et $a \neq 1$, c'est à dire $a \in [-1, 1[$. Dans ce cas $S_A(u) = \dfrac{1}{1-a}$.

b) Si $a \neq 1$, alors $U_n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$. On a donc (les séries étant absolument convergentes) :

$$\begin{aligned}
G_u(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}-1}{a-1}\frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{1-a} \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ax)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{1-a}(e^{ax} - e^x)
\end{aligned}$$

On a donc $e^{-x} G_u(x) = \dfrac{1}{1-a}(e^{(a-1)x} - 1)$ qui n'a de limite quand $x \longrightarrow +\infty$ que ssi $a - 1 < 0$ Si $a = 1$, $U_n = n + 1$ et alors :

$$\begin{aligned}
G_u(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= xe^x + e^x
\end{aligned}$$

et dans ce cas là, $e^{-x} G_u(x)$ n'a pas de limite finie en $+\infty$.

Conclusion : $u = (a^n)$ est B-sommable ssi $a < 1$ et dans ce cas là $S_B(u) = \dfrac{1}{1-a}$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de somme g_u converge et sa somme est $g_u(x) = \exp(ax)$. On a donc :

$$\int_0^x e^{-t} g_u(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} x & \text{si } a = 1 \\ \dfrac{e^{(a-1)x} - 1}{a-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut donc conclure : $u = (a^n)$ est B'-sommable ssi $a < 1$ et dans ce cas là $S_{B'}(u) = \dfrac{1}{1-a}$.

2. a) Le rayon de convergence de la série de somme f_u est 1. On a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(-x)^n = (-x)\sum_{n=1}^{+\infty} n(-x)^{n-1} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

Donc u est A sommable et $S_A(u) = -\frac{1}{4}$.

b) Les séries qui suivent ont un rayon de convergence infini et :

$$g_u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-x)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{(n-1)!} = -xe^{-x}$$

On a donc (après une intégration par parties) :

$$\int_0^x e^{-t} g_u(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x te^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} - \frac{2x+1}{4}e^{-2x}$$

Donc u est B' sommable et $S_{B'}(u) = -\frac{1}{4}$.

II Un résultat abélien

3. On a donc $u_n = O(1)$ et donc $U_n = O(n)$ Donc le rayon de convergence R_u (resp. R_U) de $\sum u_n x^n$ (resp. $\sum U_n x^n$) est supérieur à ceux de $\sum x^n$ (resp. $\sum nx^n$), qui vaut 1. Les fonctions f_u et F_u sont donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
De la même façon $\frac{u_n}{n!} = O(\frac{1}{n!})$ et donc le rayon de convergence de la série de somme g_u est supérieur à celui de la série exponentielle et est donc infini. Le domaine de g_u est donc $\mathbb{R}$. On a le même raisonnement pour G_u.

4. Si $R > 1$ alors f_u est continue en 1 car $1 \in]-R,R[$ et donc $\lim_{1^-} f_u = f_u(1)$. f_u a une limite en 1^- qui est $f_u(1)$. De ce fait f_u est A-sommable et $S_A(u) = f_u(1) = U$.

5. a) La suite $(U_n - U)$ est bornée, donc le rayon de convergence de $\sum(U_n - U)x^n$ est supérieur à 1 : pour $|x| < 1$, la série $\sum(U_n - U)x^n$ converge absolument.
On a :

$$\begin{aligned}
(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(U_n - U)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}(U_n - U)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(U_n - U)x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(U_n - U)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(U_{n-1} - U)x^n \\
&= U_0 - U + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n \quad (U_n = U_{n-1} + u_n ...) \\
&= u_0 - U + f_u(x) - u_0 \\
&= f_u(x) - U
\end{aligned}$$

b) La suite (U_n) converge vers U, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|U_n - U| \leq \varepsilon/2$.
Ensuite, si $x \in [0,1[$:

$$\begin{aligned}|f_u(x) - U| &\leq (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}|U_n - U|x^n \\ &\leq (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1}|U_n - U| + (1-x)\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{2}x^n \\ &\leq (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1}|U_n - U| + (1-x)\frac{\varepsilon}{2}\frac{x^{n_0}}{1-x} \\ &\leq \underbrace{(1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1}|U_n - U|}_{C} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Enfin, il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in [1-\eta, 1[$ alors $(1-x)C \leq \varepsilon/2$.
On vient donc de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, (il existe $n_0 \in \mathbb{N}$,) il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in [1-\eta, 1[$, $|f_u(x) - U| \leq \varepsilon$. On a donc montré que par définition :

$$f_u(x) \xrightarrow[x \longrightarrow 1^-]{} U.$$

Donc u est A-sommable et $S_A(u) = U$.

III Un résultat tauberien

6. La fonction a a pour limite 0 en $+\infty$ et est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Elle est donc bornée. On peut donc trouver une constante K (qui servira dans la suite) telle que :

$$\forall t \geq 0,\ |e^{-yt}a(t)| \leq Ke^{-yt}$$

Comme $y > 0$, $t \longmapsto e^{-yt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc par majoration, il en est de même pour $t \longmapsto e^{-yt}a(t)$.

7. a) Notons $h(y,t) = e^{-yt}a(t)$. On a :
   - Pour tout $t \geq 0$, $h(\cdot,t)$ est $\mathcal{C}^1$ et $\partial_1 h(y,t) = -te^{-yt}a(t)$.
   - Pour tout $y > 0$, la fonction $h(y,\cdot)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (cf a.) et la fonction $\partial_1 h(y,\cdot)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
   - Comme $t \longmapsto ta(t)$ tend vers 0 en $+\infty$, cette fonction est bornée. Il existe donc L qui servira dans la suite tel que :

   $$\forall t \geq 0,\ |ta(t)| \leq L.$$

   Soient a, b arbitraires tels que $0 < a < b$. Pour tout $y \in [a,b]$, tout $t \geq 0$,

   $$|\partial_1 h(y,t)| \leq Le^{-yt} \leq Le^{-at}$$

   et la fonction $t \longmapsto Le^{-at}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Le théorème ad-hoc montrer donc que J est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) En majorant :

$$|J(y)| \leq \int_0^{+\infty} K e^{-yt}\,\mathrm{d}t = \frac{K}{y}$$

Donc, par majoration :

$$J(y) \xrightarrow[y \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

8. a) On sait que pour tout $v \in \mathbb{R}$, $e^v \geq 1 + v$. Donc on a bien $1 - e^{-u} \leq u$. Pour l'autre inégalité, on utilise la croissance de exp...

b) L'existence de A provient du fait que si $t \longrightarrow +\infty$ alors $ta(t) \longrightarrow 0$.
Donc si $y < 1/A$, c'est-à-dire $1/y > A$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_A^{1/y} (1 - e^{-yt}) a(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_A^{1/y} (1 - e^{-yt})|a(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_A^{1/y} y|ta(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq y\frac{\varepsilon}{2}(\frac{1}{y} - A) \leq \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

c) On majore comme avant :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{A} (1 - e^{-yt}) a(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^{A} (1 - e^{-yt})|a(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq y\underbrace{\int_0^{A} |ta(t)|\,\mathrm{d}t}_{M}
\end{aligned}$$

d) La quantité majorante tendant vers 0, in existe $A' > 0$ tel que si $y < A'$, $My \leq \varepsilon/2$.
Donc si $y \leq B = \min(A', 1/A)$ alors $|P(y)| \leq \varepsilon$.

9. a) On a :

- Pour tout $u \geq 1$, la fonction $h(\cdot, u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$
- Pour tout $y \geq 0$, la fonction $h(y, \cdot)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$
- Pour tout $u \geq 1$, tout $y > 0$, si on pose $t = u/y$, :

$$|h(y,u)| = \left|e^{-u}\frac{1}{y}a(\frac{u}{y})\right| = \left|e^{-u}\frac{t}{u}a(t)\right| \leq L\frac{e^{-u}}{u} \leq Le^{-u}$$

et $t \longmapsto Le^{-u}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Le théorème ad-hoc montre que la fonction H définie par $H(y) = \displaystyle\int_1^{+\infty} h(y,u)\,\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, notamment en 0. On a donc :

$$\int_1^{+\infty} e^{-u}\frac{1}{y}a(\frac{u}{y})\,\mathrm{d}u = H(y) \xrightarrow[y \longrightarrow 0^+]{} H(0) = 0.$$

10.a) En faisant le changement de variables $t = u/y$ dans l'intégrale définissant $H(y)$ (légal car strictment croissant, $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $[1, +\infty[$ vers $[1/y, +\infty[$) on obtient :

$$H(y) = \int_{1/y}^{+\infty} e^{-yt} a(t)\,\mathrm{d}t = Q(y)$$

La fonction Q tend donc vers 0 en 0. Pour tout ε, il existe $B' > 0$ tel que si $y < B'$, $|Q(y)| \leq \varepsilon$.
Donc pour tout $y < C = \min(B, B')$,

$$\left| j\Big(\frac{1}{y}\Big) - J(y) \right| \leq |P(y)| + |Q(y)| \leq 2\varepsilon$$

Ce qui est par définition :

$$j\Big(\frac{1}{y}\Big) - J(y) \xrightarrow[y \longrightarrow 0^+]{} 0.$$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} a(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si j a une limite en $+\infty$ donc d'après 10.a. si et seulement si J a une limite en 0^+. On a alors :

$$\int_0^{+\infty} a(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y \longrightarrow 0^+} j\Big(\frac{1}{y}\Big) = \lim_{y \longrightarrow 0^+} J(y)$$

11. La fonction a vérifie les hypothèses de la partie III. De plus, avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{aligned} j(x) &= U_{\lfloor x \rfloor} \quad (x = 1/y) \\ J(y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \int_n^{n+1} e^{-yt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1 - e^{-y}}{y} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n e^{-ny} \\ &= \frac{1 - e^{-y}}{y} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \left(e^{-y}\right)^n \\ &= \frac{1 - e^{-y}}{y} f_u(e^{-y}) \end{aligned}$$

Donc si $u_n = o(1/n)$ et u est A-sommable alors J a une limite quand $y \longrightarrow 0$, alors $j(1/y)$ aussi et, en passant à la limite on a :

$$U = \lim_{y \longrightarrow 0^+} j\Big(\frac{1}{y}\Big) = \lim_{y \longrightarrow 0^+} J(y) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} f_u(x) = S_A(u)$$

IV Lien entre B et B'-sommabilité

12.On écrit :

$$\begin{aligned} e^{-x}G_u(x) - U &= e^{-x}\left(G_u(x) - U\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right) \\ &= e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}(U_n - U)\frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

On fixe $\varepsilon > 0$ et on exhibe le même n_0 qu'à la question 5., pour trouver la majoration :

$$\begin{aligned} \left|e^{-x}G_u(x) - U\right| &\leq e^{-x}\sum_{n=0}^{n_0-1}|U_n - U|\frac{x^n}{n!} + e^{-x}\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{2}\frac{x^n}{n!} \\ &\leq e^{-x}P_{n_0}(x) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

où P_{n_0} est un polynôme.
La conclusion suit alors le même principe : $e^{-x}P_{n_0}(x) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} 0$, donc il existe $A > 0$ tel que si $x > A$ alors $|e^{-x}P_{n_0}(x)| \leq \varepsilon/2$
Donc, (si $n \geq n_0$ et) si $x > A$ alors $\left|e^{-x}G_u(x) - U\right| \leq \varepsilon$ ce qui est, par définition le résultat cherché.

13.La question 1. en fournit un : la suite $(-1)^n$.

14.a) La série entière apparaissant dans la définition de B a pour rayon de convergence $+\infty$ (mêmes arguments qu'au 3.). Sa somme est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que B. On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} B'(x) &= -e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{U_{n-1}x^n}{n!} + e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{nU_{n-1}x^{n-1}}{n!} \\ &= -e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{U_{n-1}x^n}{n!} + e^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{U_{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= -e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{U_{n-1}x^n}{n!} + e^{-x}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{U_m x^m}{m!} \\ &= e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}(U_n - U_{n-1})\frac{x^n}{n!} \\ &= e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\frac{x^n}{n!} \\ &= e^{-x}g_u(x) \end{aligned}$$

b) On a donc :

$$B(x) = B(0) + \int_0^x B'(t)\,\mathrm{d}t = U_{-1} + \int_0^x e^{-t}g_u(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-t}g_u(t)\,\mathrm{d}t.$$

c) En remplaçant u par v où $v_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $v_n = u_{n-1}$, on a $V_n = U_{n-1}$ et donc $B(x) = e^{-x} G_v(x)$. Comme $\sum u_n$ converge, il en est de même pour $\sum v_n$ et donc v est B-sommable et $S_B(v) = V$.

On a donc $\displaystyle\int_0^x e^{-t} g_u(t)\,\mathrm{d}t = B(x) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1} = U$

15. Ces deux fonctions sont des sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$. Elles sont donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

16. a) On a :

$$\begin{aligned} G_u'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} U_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} U_{n+1} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} + U_n) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} \frac{x^n}{n!} + G_u(x) \\ &= g_u'(x) + G_u(x) \end{aligned}$$

b) On a donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-x} G_u(x)\right) = -e^{-x} G_u(x) + e^{-x} G_u'(x) = e^{-x} g_u'(x)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left[e^{-t} G_u(t)\right]_0^x &= \int_0^x e^{-t} g_u'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[e^{-t} g_u(t)\right]_0^x - \int_0^x -e^{-t} g_u(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ce qui est exactement la formule annoncée.

17. On observe que $G_u(0) = g_u(0) = u_0$ et donc la formule précédente donne :

$$e^{-x} G_u(x) = e^{-x} g_u(x) + \int_0^x e^{-t} g_u(t)\,\mathrm{d}t$$

Le résultat est alors clair : le terme $e^{-x} g_u(x)$ ayant pour limite 0, les deux autres ont donc même limite si elle existe et elles existent simultanément.