DS-4 (CCINP)
11 décembre 2019
durée : 4h

I CCP PSI Maths 1 2009 (I et II)

- Pour tout nombre réel x tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge, on note $\varphi(x)$ la valeur de cette intégrale.
- Pour tout entier naturel non nul m tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, on note J_m sa valeur.
- On admettra que pour tout $p > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ converge absolument et vaut $\dfrac{p}{1+p^2}$.

Partie A Étude de la fonction φ

On désigne par d et δ les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$d(x) = t - 1 + \cos(t)$$
$$\delta(x) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$$

1. *Étude des fonctions d et δ*
   a) Étudier la fonction d ; en déduire qu'il existe un nombre réel α tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \dfrac{1-\cos(t)}{t} \leq \alpha$.
   b) Étudier la fonction δ ; en déduire qu'il existe un nombre réel β tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \beta$.
2. *Existence de la fonction φ sur $[0, +\infty[$.*
   a) Établir la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
   b) En déduire que $\varphi(x)$ existe pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$.
3. *Limite de la fonction φ en $+\infty$.*
   a) Préciser les signe de $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$ pour $0 \leq x_1 \leq x_2$. En déduire que la fonction φ admet une limite λ en $+\infty$.
   b) Déterminer la valeur de λ (on pourra utiliser le 1.b).

4. *Caractère $\mathcal{C}^k$ de la fonction φ*
   a) Montrer que φ est continue sur $[0, +\infty[$ (On utilisera le 2.a).
   b) Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ (on pourra utiliser le 1.). On citera soigneusement le théorème utilisé.
   c) Montrer que la fonction φ' admet une limite finie (que l'on précisera) en $+\infty$ (on pourra à nouveau utiliser le 1.).
   d) Expliciter $\varphi''(x)$ pour x appartenant à $]0, +\infty[$. On donnera une expression de $\varphi''(x)$ ne contenant pas le symbole $\displaystyle\int$.
   e) Expliciter $\varphi'(x)$ pour x appartenant à $]0, +\infty[$. La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?
5. *Expression explicite de $\varphi(x)$.*
   a) Déterminer la limite de $x \ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   b) Expliciter une primitive de la fonction : $x \longmapsto \ln(x^2+1)$ (on pourra utiliser une intégration par parties).
   c) Expliciter $\varphi(x)$ pour x appartenant à $]0, +\infty[$.
   d) Déterminer $\varphi(0)$.

Partie B Étude de l'existence de J_m

1. *Étude de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^m}{t}\,\mathrm{d}t$.*
   Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^m}{t}\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel non nul m.

Pour tout entier relatif k tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, on note I_k la valeur de cette intégrale.

2. *Étude de J_1.*
   Justifier l'existence de J_1 et établir une relation entre J_1 et $\varphi(0)$ (on pourra utiliser une intégration par parties, en remarquant que $(1-\cos)' = \sin$).
3. *Étude de l'existence de I_k.*
   Préciser la nature de l'intégrale I_k selon la valeur de l'entier relatif k (on pourra utiliser une intégration par parties). On distinguera le cas $k = 0$ des autres cas.
4. *Étude de la nature de J_m.*
   Pour tout x appartenant à $[\pi/2, +\infty[$ et tout entier relatif k, on note $I_k(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{x} \frac{e^{ikt}}{t}\,\mathrm{d}t$.
   a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul m et pour tout nombre réel x appartenant à $[\pi/2, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/2}^{x} \frac{(\sin t)^m}{t}\,\mathrm{d}t$ à l'aide des intégrales $I_k(x)$.
   b) En déduire l'existence de J_{2p+1} pour tout entier naturel p.

c) Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p}}{t}\,\mathrm{d}t$ pour p entier naturel non nul ?

II Séries entières

Partie A Cours

1. Donner la formule de Taylor avec reste intégral pour f à l'ordre n entre 0 et x. On donnera notamment les hypothèses sur f et x ainsi que les nombres $\left(a_k\right)_{0\leq k\leq n}$, les entiers m et ℓ ainsi que la quantité $h(x,t)$ tels que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + R_n(x)$$

où

$$R_n(x) = \frac{x^m}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(\ell)}(h(x,t))\,\mathrm{d}t$$

Partie B Un développement en série entière

Soit $a>0$ et $f :]-a,a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,a[,\ f^{(\ell)}(x) \geq 0.$$

1. On fixe $x \in [0,a[$.
   a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \leq f(x)$.
   b) En déduire que la série de Taylor $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge.
2. a) Soit $y \in [0,a[$. Justifier que la suite $\left(R_n(y)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   b) Quel est le sens de variations de $f^{(n+1)}$?
   c) Soient x, y tels que $0 \leq x < y < a$. Montrer que :

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y).$$

3. En déduire que pour tout $x \in [0,a[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x).$$

4. On suppose dans cette question seulement que f est paire sur $]-a,a[$. Montrer que f est développable en série entière sur $]-a,a[$.

Partie C Le développement en série entière de tan

1. a) Montrer que pour tout entier n il existe un polynôme P_n à coefficients entiers positifs tel que
$$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[,\ \tan^{(n)}(x) = P_n\big(\tan(x)\big)$$
On donnera notamment P_1, P_2 et P_3.

   b) Déterminer le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

2. a) Déduire de le question 1. et de la partie B que pour tout $x \in [0, \pi/2[$,
$$\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

   b) En déduire que tan est développable en série entière sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

   c) Que peut-on dire du rayon de convergence R de ce développement en série entière ?

3. On note $\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ le développement en série entière de tan.

   a) Montrer que la fonction $\tan^2$ est développable en série entière sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Déterminer les coefficients de celui-ci.

   b) Montrer que la suite (a_n) vérifie :
$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ \forall n \geq 1,\ (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$
On pourra se servir d'une équation différentielle dont tan est solution.