DS-4 Sujet CCINP
Corrigé

I CCP PSI Maths 1 2009 (I et II) [/21]

Partie A [/15]

[1] 1. a) La fonction d est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ (attention l'énoncé disait bien sur $\mathbb{R}_+$ et pas ailleurs) et, pour tout $t \geq 0$, $d'(t) = 1 - \sin(t) \geq 0$. La fonction d est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $d(0) = 0$. Ce qui nous permet de dire que pour tout $t \geq 0$, $d(t) \geq 0$.

Or $d(t) \geq 0 \iff 1 - \cos(t) \leq t$. Donc, pour $t > 0$ on a $0 \leq \dfrac{1-\cos(t)}{t} \leq 1$. C'est-à-dire $\alpha = 1$.

[1] b) La fonction δ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geq 0$, $\delta'(t) = t - \sin(t)$. Or on sait que pour tout t positif, $\sin(t) \leq t$, donc la fonction δ est croissante et $\delta(0) = 0$. Ce qui nous permet de dire que pour tout $t \geq 0$, $\delta(t) \geq 0$. Or $\delta(t) \geq 0 \iff 1 - \cos(t) \leq \dfrac{t^2}{2}$.

Donc, pour $t > 0$ on a $0 \leq \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \dfrac{1}{2}$. C'est-à-dire $\beta = \dfrac{1}{2}$.

Attention : pour les deux questions précédentes on ne pouvait *pas* utiliser un développement limité en 0 : celui-ci n'est valable que pour t suffisamment proche de 0.

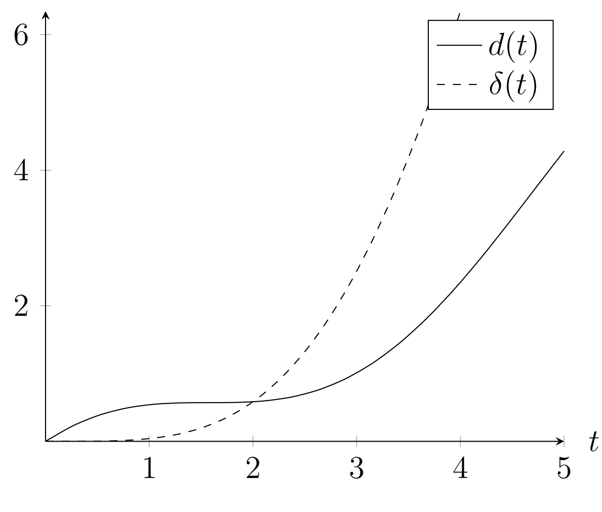

FIGURE 1 – Graphes de d et δ

2. a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est définie, positive et continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$. L'intégrale considérée présente deux problèmes : un en 0^+ et un en $+\infty$.

- En 0^+. Pour tout $t \in]0,1]$, $0 \leq \dfrac{1-\cos t}{t^2} \leq \beta$. Donc, comme $\displaystyle\int_0^1 \beta \,\mathrm{d}t$ converge, par comparaison par $\leq$ d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. [0,5]
- En $+\infty$. Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $0 \leq \dfrac{1-\cos t}{t^2} \leq \dfrac{2}{t^2}$. Donc, comme $t \longmapsto \dfrac{2}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, par comparaison par $\leq$ de fonctions intégrables, $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. [0,5]

Donc, $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, c'est-à-dire l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (absolument).

b) Pour tout $x \geq 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \leq \dfrac{1-\cos t}{t^2}$. Donc, comme $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, par comparaison par $\leq$ d'intégrales de fonctions positives, $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge (absolument), c'est-à-dire que $\varphi(x)$ existe bien. [0,5]

3. a) Pour tout $t > 0$, [1]

$$0 \leq \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-x_2 t} \leq \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-x_1 t}$$

Donc $0 \leq \varphi(x_2) \leq \varphi(x_1)$. La fonction φ est donc décroissante et minorée (par 0) sur $\mathbb{R}_+$: elle admet donc une limite $\lambda \geq 0$ en $+\infty$.

b) Pour tout $x > 0$ et tout $t > 0$, on a : [1]

$$0 \leq \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt} \leq \beta e^{-xt}$$

Donc, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq \varphi(x) \leq \beta \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{\beta}{x}.$$

En utilisant le théorème des gendarmes, on conclut que :

$$\lambda = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

4. Pénible : tout le cours y passe ! Il était obligatoire de citer correctement les théorèmes utilisés.

a) Notons $f_0(x,t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$. On a : [1,5]

(i) Pour tout $x \geq 0$, $t \longmapsto f_0(x,t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf II.A.2.b).

(ii) Pour tout $t > 0$, $x \longmapsto f_0(x,t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(iii) Pour tout $x \geq 0$, tout $t > 0$, $0 \leq f_0(x,t) \leq \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ et $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf. II.A.2.b ; hypothèse de domination)

Donc, en vertu du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

[1,5] b) On a :

(i) Pour tout $t > 0$, $x \longmapsto f_0(x,t)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial f_0}{\partial x}(x,t) = f_1(x,t) = -\dfrac{1-\cos t}{t}e^{-xt}$, $\dfrac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}(x,t) = f_2(x,t) = (1-\cos t)e^{-xt}$.

(ii) Pour tout $x > 0$:
- la fonction $t \longmapsto f_0(x,t)$ est continue (par morceaux) et intégrable (cf. II.A.2.b) ;
- la fonction $t \longmapsto f_1(x,t)$ est continue (par morceaux) et intégrable car $|f_1(x,t)| \leq \alpha e^{-xt}$ et $t \longmapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- la fonction $t \longmapsto f_2(x,t)$ est continue (par morceaux) et intégrable car $|f_2(x,t)| \leq 2e^{-xt}$ et $t \longmapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(iii) Pour tous a, b tels que $0 < a < b$, tout $x \in [a,b]$, tout $t > 0$,

$$0 \leq |f_1(x,t)| = \left|\frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}\right| \leq \alpha e^{-at}$$
$$0 \leq |f_2(x,t)| = \left|(1-\cos t)e^{-xt}\right| \leq 2e^{-at}$$

et $t \longmapsto e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme le segment $[a,b]$ est arbitraire dans $]0,+\infty[$, on a vérifié l'hypothèse de domination sur tout segment de $]0,+\infty[$ pour f_1 et f_2.

Donc en utilisant le théorème de dérivations des intégrales dépendant d'un paramètre, la fonction φ est donc $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$
$$\varphi''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

[1] c) En reprenant l'idée de la démonstration du 3.b, on a, pour tout $x > 0$:

$$0 \leq |\varphi'(x)| \leq \int_0^{+\infty} \alpha e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{x}.$$

Donc, à l'aide du théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0.$$

[0,5] d) En utilisant la formule de l'énoncé, on a :

$$\varphi''(x) = \int_0^{+\infty} e^{xt}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{xt}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

e) On a donc : [1,5]

$$\varphi'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + K = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + K$$

où K est une constante à déterminer. Or $\lim\limits_{+\infty} \varphi'(x) = 0$, donc, $K = 0$. On a alors, pour tout $x > 0$, :

$$\varphi'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right).$$

La fonction φ' n'a pas de limite finie en 0^+ : elle tend vers $-\infty$. Or, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x > 0$, il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(c)$$

donc, quand $x \longrightarrow 0^+$:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \longrightarrow 0^+]{} -\infty.$$

Ceci permet de dire que φ n'est pas dérivable en 0 mais que son graphe à une tangente verticale (dirigée vers le bas) en 0.

5. a) On a : [0,5]

$$x\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = x\ln\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x}{1+x^2}$$

Donc :

$$x\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} -0.$$

b) On a : [1]

$$\begin{aligned}
\int_0^X \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x &= \Big[x\ln(1+x^2)\Big]_0^X - \int_0^X x \cdot \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= X\ln(1+X^2) - \int_0^X 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= X\ln(1+X^2) - 2X + 2\arctan(X)
\end{aligned}$$

Les primitives de $x \longmapsto \ln(1+x^2)$ sont donc les fonctions de la forme :

$$x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x) + K$$

où K est une constante réelle.

[1] c) On a, d'après la question II.A.4.f, $\varphi'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Il existe donc une constante K telle que :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x\ln(x) - x - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) + x - \arctan(x) + K \\ &= \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) - \arctan(x) + K\end{aligned}$$

En se souvenant que $\lim\limits_{+\infty}\varphi = 0$, et en utilisant la question II.A.5.a, on obtient $K = \dfrac{\pi}{2}$.

[1] d) Comme φ est continue en 0, on a : $\varphi(0) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\varphi(x) = K = \dfrac{\pi}{2}$.

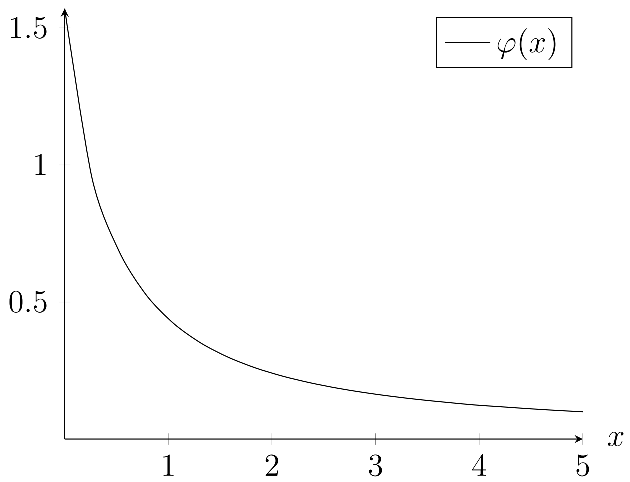

Figure 2 – Graphe de φ

Partie B [/6]

[1] 1. La fonction $t \longmapsto \dfrac{(\sin t)^m}{t}$ est positive, définie et continue sur $]0, \dfrac{\pi}{2}]$. De plus

$$\frac{(\sin t)^m}{t} \underset{0}{\sim} t^{m-1}$$

Or, $m \in \mathbb{N}^*$, donc t^{m-1} a une limite en 0^+, donc $t \longmapsto \dfrac{(\sin t)^m}{t}$ a une limite en 0^+ et est donc prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0, \dfrac{\pi}{2}]$, c'est-à-dire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^m}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

[1] 2. Pour tous a, b tels que $0 < a < b$ on a :

$$\int_a^b \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[(1-\cos t)\cdot\frac{-1}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $(1-\cos t)\cdot\dfrac{-1}{t}$ a pour limite 0 en 0^+ (voir l'encadrement du II.A.1.b) et en $+\infty$ et que $\varphi(0)$ existe, l'intégrale J_1 existe et :

$$\varphi(0)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=J_1.$$

3. Deux cas à considérer. [1]

- Si $k=0$, $I_0=\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge : c'est un exemple de Riemann.
- Si $k\neq 0$ alors, pour tout T tel que $\pi/2<T$:

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{T}\frac{e^{ikt}}{t}\,\mathrm{d}t&=\left[\frac{e^{ikt}}{ik}\cdot\frac{1}{t}\right]_{\pi/2}^{T}-\int_{\pi/2}^{T}\frac{e^{ikt}}{ik}\cdot\frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{ik}\left[\frac{e^{ikt}}{t}\right]_{\pi/2}^{T}+\frac{1}{ik}\int_{\pi/2}^{T}\frac{e^{ikt}}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{e^{ikt}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument et $\left[\dfrac{e^{ikt}}{t}\right]_{\pi/2}^{T}$ a une limite finie quand $T\longrightarrow+\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/2}^{T}\frac{e^{ikt}}{t}\,\mathrm{d}t$ a donc une limite finie quand $T\longrightarrow+\infty$: I_k est donc convergente.

4. a) On sait que (formules d'Euler) $\sin(t)=\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$. Donc : [1]

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{x}\frac{(\sin t)^m}{t}\,\mathrm{d}t&=\int_{\pi/2}^{x}\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^m\,\mathrm{d}t\\&=\int_{\pi/2}^{x}\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2^m i^m}\cdot\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{k}{m}e^{ikt}e^{-i(n-k)t}\right)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2^m i^m}\cdot\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\int_{\pi/2}^{x}\frac{e^{i(2k-n)t}}{t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2^m i^m}\cdot\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}I_{2k-n}(x)\end{aligned}$$

b) Donc si, pour tout $k\in[\![0,m]\!]$, l'intégrale $I_{2k-m}(x)$ a une limite quand $x\longrightarrow+\infty$ (ce qui est le cas si et seulement si $2k-m\neq 0$) alors $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{(\sin t)^m}{t}\,\mathrm{d}t$ existe, donc, d'après le II.B.1., J_m existe. [1]
Donc si m est impair tel que $m=2p+1$ alors J_{2p+1} existe.

c) Par contre si $m=2p$ est pair, la somme du a. contiendra un terme égal à $I_0(x)$ qui n'a pas de limite finie quand $x\longrightarrow+\infty$ et m termes qui ont une limite finie quand $x\longrightarrow+\infty$. [1]
L'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{(\sin t)^{2p}}{t}\,\mathrm{d}t$ est donc divergente. Il en est alors de même pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\sin t)^{2p}}{t}\,\mathrm{d}t$...

II Séries entières []

Partie A Cours [/1]

ⓐ [1] 1. Cours ! f est au moins $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle contenant 0 et x et on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![0,n]\!] \ a_k &= \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \\ m = \ell &= n+1 \\ h(x,t) &= tx \end{aligned}$$

Partie B Un développement en série entière [/8]

[1] 1. a) On remarque que comme $f^{(n+1)}(tx) \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in [0,a[$, on a $R_n(x) \geq 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) \\ &\geq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \end{aligned}$$

[1] b) La série de terme général $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ $(n \geq 0)$ est à termes positifs et le a indique que ses sommes partielles sont majorées : elle est donc convergente.

[0,5] 2. a) Avec le même argument qu'au 1.a, on a, pour tout n : $0 \leq R_n(x) \leq f(x)$.

[0,5] b) La dérivée $f^{(n+2)}$ est positive et donc $f^{(n+1)}$ est croissante.

[1,5] c) Calculons :

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(x) &= \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} \times \frac{y^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} \times \frac{y^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(ty)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

car pour tout $t \in [0,1]$, $tx \leq ty$ et donc $f^{(n+1)}(tx) \leq f^{(n+1)}(ty)$...

[1,5] 3. Soit y tel que $x < y < a$. Comme la suite $\big(R_n(y)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que $0 \leq x/y < 1$, on a $R_n(x)$ qui est majorée par une suite géométrique convergeant vers 0 multipliée par une suite bornée. On a alors :

$$R_n(x) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

Donc :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

C'est-à-dire $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

4. Comme f est paire alors $f^{(n)}(0) = 0$ dès que n est impair et donc, pour tout $x \in [0, a[$: [2]

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} x^{2m}$$

De plus, si $x \in]-a, 0]$ alors $y = -x \in [0, a[$ et alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \quad f \text{ paire} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} y^{2m} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} (-x)^{2m} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} x^{2m} \end{aligned}$$

La fonction f est donc bien la somme d'une série entière sur $]-a, a[$.

Partie C Le développement en série entière de tan [/8]

1. a) Récurrence sur n. On a $P_0 = X$ et, comme $\tan' = 1 + \tan^2$, $P_1 = 1 + X^2$. De plus si $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$ alors $\tan^{(n+1)}(x) = \tan'(x)P_n'(\tan(x))$ et donc $P_{n+1} = (1 + X^2)P_n'$. P_n est un produit de deux polynômes à coefficients positifs : c'est un polynôme à coefficients positifs. [1]
On a :

$$\begin{aligned} P_0 &= X \\ P_1 &= 1 + X^2 \\ P_2 &= 2X + 2X^3 \\ P_3 &= (1 + X^2) \cdot (2 + 6X^2) \\ &= 2 + 8X^2 + 6X^4 \end{aligned}$$

b) Par récurrence on montre que P_n est de degré $n + 1$ et $P_n = n!X^{n+1} + \cdots$. [1]

2. a) La question 1 garantit que pour tout n, $\tan^{(n)} \geq 0$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et donc la partie B donne la formule demandée. [1]

b) La même méthode qu'au B.4. permet de montrer que la formule précédente reste vraie pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. [2]

$[0,5]$ c) Vu que la série entière converge pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, le rayon de convergence R vérifie $R \geq \pi/2$.

3. On sait que comme tan est impaire, si n est pair alors $a_n = 0$, mais on ne s'en servira pas vraiment...

$[1]$ a) $\tan^2$ est le produit de deux fonctions développables en série entière sur $]-\pi/2, \pi/2[$, elle est donc développable en série entière sur ce même intervalle et le produit de Cauchy permet de dire :

$$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[,\ \tan^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\Big) x^n$$

$[1,5]$ b) Comme $\tan' = 1 + \tan^2$, on a pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\Big) x^n \\ &= 1 + a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\Big) x^n\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}(0+1)\cdot a_1 &= 1 + a_0^2 \\ \forall n \geq 1,\ (n+1) a_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\end{aligned}$$

Comme tan est impaire, on a $a_0 = 0$ et donc $a_1 = 1$.