# DS-3
# 6 novembre 2019
# durée : 4h

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls, $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Notons :

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$,

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$,

$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont inversibles,

$I_n$ la matrice identité d'ordre $n$.

**Définitions 1.** Soient $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On note $\mathrm{E}_\lambda(A, B)$ l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $AX = \lambda BX$.
- On dit que $\lambda$ est **valeur propre du couple** $(A, B)$ si $\mathrm{E}_\lambda(A, B)$, n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire si $\lambda B - A$ n'est pas inversible.
- On note $\chi_{(A,B)}$ la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par $\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(\lambda B - A)$ et $\mathrm{Sp}(A, B)$ l'ensemble des valeurs propres du couple $(A, B)$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\chi_{(A,B)}(\lambda) = 0$.

Dans le cas particulier où $B = I_n$, on remarquera que ces définitions correspondent aux notions de valeur propre, d'espace propre et de polynôme caractéristique de $A$.

Ainsi, $\mathrm{E}_\lambda(A, I_n)$ et $\chi_{(A,I_n)}$ sont notés plus simplement $\mathrm{E}_\lambda(A)$ et $\chi_A$.
*Les différentes parties sont largement indépendantes.*

## Partie A Diagonalisabilité dans un cas particulier

Soit : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On note aussi $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ pour $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

1. a) Montrer que $B$ n'est pas inversible.
   b) Montrer que $A$ est inversible.

c) Vérifier[1] que $C = A^{-1}B$.

2. a) Montrer que $\chi_{(A,B)} = (2\lambda - 1)^2$.
   b) En déduire $\operatorname{Sp}(A, B)$.
   c) Déterminer une base de $\mathrm{E}_{1/2}(A, B)$ et en déduire que $\dim \mathrm{E}_{1/2}(A, B) = 2$.

3. a) Calculer $\chi_{(B,A)}(\lambda)$ et en déduire que $\operatorname{Sp}(B, A) = \{0, 2\}$.
   b) Établir les identités suivantes :

$$\mathrm{E}_0(B, A) = \operatorname{vect}\{\mathbf{u}_1\} = \mathrm{E}_0(C) \text{ et } \mathrm{E}_2(B, A) = \operatorname{vect}\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \mathrm{E}_2(C).$$

   c) En déduire que $\dim \mathrm{E}_0(B, A) + \dim \mathrm{E}_2(B, A) = 3$.

4. a) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $C$.
   b) Déterminer explicitement une matrice $R \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $C = RDR^{-1}$.
   c) Montrer que $B = ARDR^{-1}$.
   d) Justifier qu'il existe[2] $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PI_3Q$ et $B = PDQ$.

**Définitions 2.** Soient $(A, B, A', B') \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)^4$.

- On dit que le couple $(A, B)$ est **régulier** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\chi_{(A,B)}(\lambda) \neq 0$.
- On dit que le couple $(A, B)$ est **équivalent** au couple $(A', B')$ et on note $(A, B) \sim (A', B')$ si il existe $P$, $Q$ inversibles telles que :

$$A = PA'Q \text{ et } B = PB'Q.$$

- On dit que le couple $(A, B)$ est **diagonalisable** si il existe $D$ et $D'$ diagonales et telles que :

$$(A, B) \sim (D, D').$$

## Partie B Régularité et diagonalisabilité

1. Soit $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$.
   a) On suppose dans cette question que $B$ est inversible. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, exprimer $\chi_{(A,B)}(\lambda)$ en fonction de $\chi_{B^{-1}A}(\lambda)$ et en déduire que $\chi_{(A,B)}$ est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.
   b) On suppose dans cette question que $n \geq 2$. Donner un exemple[3] de couple $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)^2$ pour lequel la fonction $\chi_{(A,B)}$ est la fonction nulle alors que ni $A$ ni $B$ n'est la matrice nulle.

[1] En faisant le *minimum* de calculs ! Ça peut se faire en une ligne...
[2] À nouveau : rester simple. Les matrices $P$ et $Q$ peuvent dépendre explicitement de $A$.
[3] Chercher des matrices pour lesquelles il est *facile* de calculer le déterminant.

On admet que $\chi_{(A,B)}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n$.

2. a) Montrer que :

$$(A,B) \sim (A',B') \iff \exists P,Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \ | \ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda B - A = P(\lambda B' - A')Q$$

b) Établir que si $(A,B)$ et équivalent à $(A',B')$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$, non nul, tel que $\chi_{(A,B)} = \alpha \cdot \chi_{(A',B')}$, puis que $\mathrm{Sp}(A,B) = \mathrm{Sp}(A',B')$.

3. On suppose dans cette question que $(A,B)$ est régulier.
   a) Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\,,\ \chi_{(A,B)}(\lambda) = (-\lambda)^n \cdot \chi_{(B,A)}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big).$$

   b) Montrer que $(B,A)$ est régulier.
   c) On suppose dans cette question que $r$ et $s$ sont deux entiers tels que $1 \leq r \leq s \leq n$ et $a_r,\ a_{r+1},\ \ldots,\ a_s$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $a_r \neq 0$ et $a_s \neq 0$. On suppose également que $\chi_{(B,A)}$ s'écrit sous la forme :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_{(B,A)}(\lambda) = \sum_{k=r}^{s} a_k \lambda^k.$$

   Montrer que 0 est racine de $\chi_{(B,A)}$ d'ordre $r$ et que $\chi_{(A,B)}$ est de degré $n-r$.
   d) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   i) $B$ est inversible ;
   ii) $\chi_{(A,B)}$ est de degré $n$ ;
   iii) $0 \notin \mathrm{Sp}(B,A)$.
4. On suppose dans cette question que $B$ est inversible. Montrer que $B^{-1}A$ est diagonalisable si et seulement si $(A,B)$ est diagonalisable.
5. Justifier que $(A,B)$ est diagonalisable si et seulement si $(B,A)$ l'est.

**Definitions 3.** Soit $(A,B)$ un couple régulier. On suppose à partir de maintenant que $B$ **n'est pas inversible**.

- Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A,B)$, on onte $m_\lambda(A,B)$ **l'odre de multiplicité** de $\lambda$ en tant que racine de $\chi_{(A,B)}$.
- On note $\mathrm{Sp}_\infty(A,B) = \mathrm{Sp}(A,B) \cup \{\infty\}$, $m_\infty(A,B) = m_0(B,A)$ l'ordre de multiplicité de 0 en tant que racine de $\chi_{(B,A)}$ et $\mathrm{E}_\infty(A,B) = \mathrm{E}_0(B,A)$.

On cherche un critère de diagonalisabilité de $(A,B)$ faisant intervenir $\dim(\mathrm{E}_\lambda(A,B))$.

- On dit que $(A,B)$ vérifie la propriété $\mathcal{H}$ si :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A,B),\ \dim(\mathrm{E}_\lambda(A,B)) = m_\lambda(A,B).$$

## Partie C Un critère de diagonalisabilité

Dans toute cette partie on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^2$ un couple régulier. Il existe donc $\lambda_0$ tel que $\lambda_0 B - A$ est inversible.
Dans toute la suite de cette partie[4], **on suppose pour simplifier les notations que** $\lambda_0 = 0$ si bien que $A$ **est inversible.**

On note $d$ le degré de $\chi_{(A,B)}$ et $C = A^{-1}B$.

1. a) Montrer que $\mathrm{E}_0(C) = \mathrm{E}_0(B, A) = \mathrm{E}_\infty(A, B)$.
   b) Montrer que si $\lambda \neq 0$ alors $\mathrm{E}_\lambda(C) = \mathrm{E}_{1/\lambda}(A, B)$.
   c) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des éléments distincts de $\mathbb{C}$. Justifier que si $\mathrm{Sp}(C) = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_k\}$, alors $\mathrm{Sp}_\infty(A, B) = \left\{\dfrac{1}{\lambda_1}, \ldots, \dfrac{1}{\lambda_k}\right\}$ où on a posé $\dfrac{1}{0} = \infty$.
2. Vérifier que $m_\infty(A, B) = n - d$, puis que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A, B) = n$.
3. On suppose dans toute la suite de cette partie que $(A, B)$ vérifie la propriété $\mathcal{H}$.
   a) Montrer que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} \dim(\mathrm{E}_\lambda(A, B)) = n$.
   b) Montrer que $C$ est diagonalisable.
   c) Établir que le couple $(A, B)$ est diagonalisable.

Dans la suite du problème, on admettra que si $(A, B)$ est régulier et que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $(A, B)$ est diagonalisable si et seulement si $(A, B)$ vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

## Partie D Un exemple de non diagonalisabilité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{C}^n$ tel que :

$$f(\mathbf{e}_1) = 0 \quad \text{et si } n \geq 2, \quad \forall k \in [\![2, n]\!]\,, \quad f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i-1}$$

On note $A_n$ la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ et $B_n = {A_n}^\mathsf{T}$.
On note $g$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $B_n$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_{(A_n,B_n)}(\lambda)$ sera noté $c_n(\lambda)$. On définit de plus $c_0(\lambda) = 1$.

1. Donner la forme explicite des matrices $A_n$ et $B_n$.
2. Vérifier que la matrice de $\lambda g - f$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ \lambda & 0 & -1 & & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & \lambda & 0 & -1 \\ & & & & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

[4]Et seulement celle-ci !

3. a) Calculer $c_1(\lambda)$, $c_2(\lambda)$, $c_3(\lambda)$ et $c_4(\lambda)$.
   b) Montrer que pour $n \geq 2$, $c_n(\lambda) = \lambda \cdot c_{n-2}(\lambda)$.
   c) En déduire, pour $k \in \mathbb{N}$, les expressions de $c_{2k}(\lambda)$ et $c_{2k+1}(\lambda)$.
   d) Donner une condition sur $n$ pour que $(A_n, B_n)$ soit régulier.
4. a) Déterminer $\dim(\mathrm{E}_0(A_4, B_4))$ et $\dim(\mathrm{E}_\infty(A_4, B_4))$.
   b) Calculer $m_0(A_4, B_4)$ et $m_\infty(A_4, B_4)$.
   c) Le couple $(A_4, B_4)$ est-il diagonalisable ?