DS-3 — Corrigé

Partie A [/10]

SF [0,5] 1. a) On calcule $\det(B) = 0$ ou on remarque que les deux premières colonnes de B sont colinéaires.

SF [0,5] b) On calcule $\det(A) = -1 \neq 0$

SF [0,5] c) On calcule AC et on le compare à B.

SF [1] 2. a) On a :

$$\begin{aligned}\chi_{(A,B)}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 4\lambda-2 & 2\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda+1 \end{vmatrix} \\ &= (2\lambda-1)(1-2\lambda)\begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2\lambda-1)^2.\end{aligned}$$

SF [0,5] b) Donc $\mathrm{Sp}(A,B) = \{1/2\}$.

SF [1] c) Observons :

$$\frac{1}{2}B - A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 1. une base de son noyau est par exemple $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. De ce fait :

$$\mathrm{E}_{1/2}(A,B) = \mathrm{vect}\,\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}\ ...$$

[1] 3. a) Un calcul donne : $\chi_{(B,A)}(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2$ (on met en facteur λ dans la première ligne du déterminant et $\lambda - 2$ dans les deux autres).

b) Rappel : $\mathrm{E}_\lambda(B,A) = \ker(\lambda A - B)$ et $\mathrm{E}_\lambda(C) = \ker(\lambda I_n - C)$.

[1] i) Les matrices $0A - B$ et $0I_3 - C$ sont de rang 2 (les deux dernières colonnes indépendantes et la première égale au double de le deuxième. On a donc bien $\mathrm{E}_0(B,A) = \mathrm{E}_0(C) = \mathrm{vect}\,\{\mathbf{u}_1\}$.

[1] ii) On a :

$$2A - B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2I_3 - C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -12 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices sont de rang 1 et (on l'a déjà vu au 2.c pour la matrice $2A-B$) leur noyau a pour base $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

SF [0,5] c) On a les bases des deux sous-espaces : la somme des dimensions est claire... Bonus : on vient de montrer que C est diagonalisable.

4. a) On a : [0,5] **SF**

$$\det(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)=\begin{vmatrix}1&1&0\\-2&0&1\\0&-3&-1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

La famille $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$ est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$. De plus, par construction (cf 3.b.) cette famille est formée de vecteurs propres de C.
On aurait pu dire : $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$ est une réunion de bases de sous-espace propres de C : elle est donc libre. Comme son cardinal est 3, c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour C.

b) On a vu au 3.b que C est diagonalisable et qu'une base de vecteurs propres de C est donnée par $\mathcal{F}$. En observant l'ordre des valeurs propres, on voit que : [0,5]

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&0&1\\0&-3&-1\end{pmatrix}$$

c) On a $B=AC=ARDR^{-1}$... [0,5] **SF**

d) Posons $P=AR$ et $Q=R^{-1}$. Les matrices P et Q sont inversibles. En effet : A est le produit de deux matrices inversibles et B est l'inverse d'une matrice inversible. [1]
De plus

$$PI_3Q=PQ=ARR^{-1}=A$$
$$PDQ=ARDR^{-1}=B.$$

Partie B [/13]

1. a) On a : [1]

$$\chi_{(A,B)}(\lambda)=\det(\lambda B-A)=\det\Big(B(\lambda I-B^{-1}A)\Big)=\det(B)\chi_{B^{-1}A}(\lambda)$$

La fonction $\chi_{(A,B)}$ est donc polynomiale de degré n.

b) Prenons pour A et B la même matrice N : une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle. Son déterminant est donc nul. [1]

$$\chi_{(A,B)}(\lambda)=\det(\lambda N-N)=\det((\lambda-1)N)=(\lambda-1)^n\det(N)=0.$$

2. a) On a deux sens :

($\Rightarrow$) Découle directement de la définition... [0,5]

($\Leftarrow$) Comme λ est quelconque, on pose $\lambda=0$ pour obtenir $A=PA'Q$, puis on simplifie et on pose $\lambda=1$ pour avoir $B=PB'Q$. Attention le mot « identifier » est à proscrire ici... [1]

b) On utilise la formule trouvée à la question précédente pour écrire : [1]

$$\begin{aligned}\chi_{(A,B)}(\lambda)&=\det(\lambda B-A)\\&=\det\Big(P(\lambda A'-B')Q\Big)\\&=\det(P)\chi_{(A',B')}(\lambda)\det(Q)\end{aligned}$$

La constante α est donc $\alpha = \det(P)\det(Q)$ et elle est non nulle car P et Q sont inversibles.
Comme $\alpha \neq 0$, les polynômes $\chi_{(A,B)}$ et $\chi_{(A',B')}$ ont même racines, d'où l'égalité $\mathrm{Sp}(A,B) = \mathrm{Sp}(A',B')$.

[1] 3. a) Soit $\lambda \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} \chi_{(A,B)}(\lambda) &= \det(\lambda B - A) \\ &= \det\Big(-\lambda(\frac{1}{\lambda}A - B)\Big) \\ &= (-\lambda)^n \det\Big(\frac{1}{\lambda}A - B\Big) \\ &== (-\lambda)^n \chi_{(B,A)}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) \end{aligned}$$

[0,5] b) La fonction $\chi_{(A,B)}$ est polynomiale et non nulle. Il existe au moins un réel $\lambda \neq 0$ pour lequel $\chi_{(A,B)} \neq 0$ (sinon on aurait une infinité de racines...). D'après la question précédente $\chi_{(B,A)}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) \neq 0$, et donc (B,A) est régulier.

c) Par construction :

$$\chi_{(B,A)}(\lambda) = \lambda^r \underbrace{\sum_{k=0}^{s-r} a_{r+k}\lambda^k}_{P(\lambda)}$$

[1] On a $P(0) = a_r \neq 0$, donc λ est bien racine d'ordre r de $\chi_{(B,A)}$. La formule du a. donne :

$$\begin{aligned} \chi_{(A,B)}(\lambda) &= (-\lambda)^n \sum_{k=s}^{r} a_k \lambda^{-k} \\ &= (-1)^n \sum_{k=r}^{s} a_k \lambda^{n-k} \\ &= (-1)^n \sum_{\ell=n-s}^{n-r} a_{n-\ell}\lambda^k \\ &= (-1)^n \Big(a_r\lambda^{n-r} + \cdots + a_s\lambda^{n-s}\Big) \end{aligned}$$

[1] Comme $a_r \neq 0$, on a bien $\chi_{(A,B)}$ de degré $n-r$.

d) Procédons par implications circulaires

[] 0,5 $(i) \Rightarrow (ii)$ Si B est inversible, on utilise le 1. pour montrer que $\chi_{(A,B)}$ est de degré n.

[] 1 $(ii) \Rightarrow (iii)$ D'après le 3.c, si 0 est racine de $\chi_{(B,A)}$ alors $s \geq 1$ et donc le degré de $\chi_{(A,B)}$ est au plus $n-1$, ce qui contredit (ii).

[] 1 $(iii) \Rightarrow (i)$ On a donc $\chi_{(B,A)}(0) \neq 0$, c'est à dire $\det(0 \cdot A - B) \neq 0$ donc $\det(B) \neq 0$ et finalement B inversible.

4. a) Supposons que $B^{-1}A$ est diagonalisable, c'est-à-dire qu'on peut écrire $B^{-1}A = RDR^{-1}$ avec D diagonale. Ce qu'on écrit aussi : $A = BRDR^{-1}$. Posons alors $P = BR$ et $Q = R^{-1}$. Les matrices P et Q sont inversibles et on a : [1]

$$PDQ = BRDR^{-1} = A$$
$$PI_nQ = PQ = BRR^{-1} = B$$

Ce qui dit que $(A, B) \sim (D, I_n)$. Comme I_n est diagonale, on a bien (A, B) diagonalisable.

b) Réciproquement supposons (A, B) diagonalisable. On a alors $A = PDQ$ et $B = PD'Q$ avec P, Q inversibles et D, D' diagonales. Comme B est inversible, D' l'est aussi. Calculons : [1]

$$\begin{aligned} B^{-1}A &= Q^{-1}D'^{-1}P^{-1} \cdot PDQ \\ &= Q^{-1}D'^{-1}DQ \end{aligned}$$

On remarque que comme D et D' sont diagonales, $\Delta = D'^{-1}D$ l'est aussi et qu'en posant $R = Q^{-1}$, on a $B^{-1}A = R\Delta R^{-1}$ c'est-à-dire que $B^{-1}A$ est diagonalisable.

5. Si (A, B) est diagonalisable alors en utilisant la définition $A = PDQ$, $B = PD'Q$. Donc[1] $B = PD'Q$ et $A = PDQ$, c'est à dire $(B, A) \sim (D', D)$ et donc (B, A) diagonalisable. L'autre implication est tout aussi évidente. [0,5]

Partie C [/7]

1. a) On a $X \in \mathrm{E}_0(C)$ ssi $CX = 0$ ssi $A^{-1}BX = 0$ ssi $BX = 0$ ssi $BX = 0 \cdot AX$ ssi $X \in \mathrm{E}_0(B, A)$. Donc $\mathrm{E}_0(C) = \mathrm{E}_0(B, A)$ l'autre égalité étant la définition de E_∞. [1] **SF**

b) De même $X \in \mathrm{E}_\lambda(C)$ ssi $CX = \lambda X$ ssi $BX = \lambda AX$ ssi $\dfrac{1}{\lambda}BX = AX$ ssi $X \in \mathrm{E}_{1/\lambda}(A, B)$. [1] **SF**

c) Les deux questions précédentes[2] montrent que $\lambda \in \mathrm{Sp}(C)$ ssi $1/\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A, B)$. [0,5]

2. On a $m_\infty(A, B) = m_0(B, A)$ et le B.3.c permet de conclure : le degré de $\chi_{(A,B)}$ est $n-r$ où r est l'ordre de 0 dans $\chi_{(B,A)}$. Ici $r = m_0(B, A)$. [1]
En utilisant le 1.c, [1]

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(A,B)} m_\lambda(A, B) &= \sum_{1/\lambda \in \mathrm{Sp}(C)} m_{1/\lambda}(C) \\ &= \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(C)} m_\mu(C) \\ &= n \end{aligned}$$

Car le polynôme caractéristique est scindé (on est dans $\mathbb{C}[X]$) et la somme des multiplicité des racines est égale au degré.

[1] C'est un jeu d'écritures
[2] Et la convention $1/0 = \infty$.

SF [0,5] 3. a) On se contente de reprendre la formule trouvée au 2. et d'y insérer la propriété $\mathcal{H}$.

[1] b) On sait que pour tout λ, $\mathrm{E}_\lambda(C) = \mathrm{E}_{1/\lambda}(A, B)$. Le a. donne alors :

$$\sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(C)} \dim(\mathrm{E}_\mu(C)) = n$$

Ce qui dit bien que C est diagonalisable.

[1] c) En échangeant les rôles de A et B, on se retrouve avec la question B.4.

Partie D [/9]

SF [1] 1. On a :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & (0) & & 0 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a notamment $A_1 = B_1 = (0)$...

SF [0,5] 2. La matrice de $\lambda g - f$ est $\lambda B_n - A_n$...

SF [1,5] 3. a) Un calcul rapide donne :

$$c_1(\lambda) = 0,\ c_2(\lambda) = \lambda,\ c_3(\lambda) = 0,\ c_4(\lambda) = \lambda^2.$$

Pour c_3, on voit que la 1re et 3e colonne de $\lambda B_3 - A_3$ sont colinéaires. Pour c_4, on développe par exemple par rapport à la 1re ligne.

[1] b) Calcul

$$\begin{aligned}
c_n(\lambda) &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & & & \\ \lambda & 0 & -1 & & & \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 0 & -1 \\ & & & & \lambda & 0 \end{vmatrix}_n \\
&= (-1)^{1+2} \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & & & & \\ \lambda & 0 & -1 & & & \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 0 & -1 \\ & & & & \lambda & 0 \end{vmatrix}_{n-1} \quad \text{(Développement / 1}^{\text{re}} \text{ col.)} \\
&= -\lambda \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot c_{n-2}(\lambda) \quad \text{(Développement / 1}^{\text{re}} \text{ ligne.)} \\
&= \lambda c_{n-2}(\lambda)
\end{aligned}$$

c) On a donc : [1]

$$c_{2k}(\lambda) = \lambda^k c_0(\lambda) = \lambda^k,$$
$$c_{2k+1}(\lambda) = \lambda^k c_1(\lambda) = 0.$$

d) D'après la définition, (A_n, B_n) est régulier ssi n est pair. [1]

4. a) $X \in \mathrm{E}_0(A_4, B_4)$ ssi $A_4(X) = 0$ ssi X est un multiple de $(1, 0, 0, 0) = \mathbf{e}_1$. [0,5]
De même $X \in \mathrm{E}_\infty(A_4, B_4)$ ssi $X \in \mathrm{E}_0(B_4, A_4)$ ssi $B_4X = 0$ ssi X est un multiple de $(1, 0, 0, 0) = \mathbf{e}_4$. [0,5]
On obtient donc :

$$\dim(\mathrm{E}_0(A_4, B_4)) = \dim(\mathrm{E}_\infty(A_4, B_4)) = 1.$$

b) On a $\chi_{(A_4,B_4)}(\lambda) = \lambda^2$ donc $\mathrm{Sp}(A_4, B_4) = \{0\}$ et $m_0(A_4, B_4) = 2$. La formule trouvée au C.2. ou un calcul direct de $\chi_{(B_4,A_4)}$ donne $m_\infty(A_4, B_4) = 2$. [1]

c) Le couple (A_4, B_4) ne vérifie pas $\mathcal{H}$: il n'est donc pas diagonalisable. [1]