DS-2 — 5 octobre 2019
Durée : 4 heures

Notations valables pour tout le problème

- n désigne un réel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$. On notera 0_{E} le vecteur nul de E, Id l'application identité de E et θ l'application qui à tout vecteur de E associe 0_{E}.
- f est un endomorphisme de E, $\mathrm{Im}(f)$ désigne son image et $\ker(f)$ son noyau.
- On pose $f^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on pose $f^k = f \circ f^{k-1}$.

Partie A

Le but de cette partie est de démontrer que, pour tout endomorphisme f de E, *il existe un entier p qui vérifie :*

$$(1) \qquad \begin{cases} 1 \leq p \leq n \\ \mathrm{E} = \ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p) \end{cases}$$

(le symbole $\oplus$ signifie que la somme des sous-espaces vectoriels est directe)

1. Dans cette question f est un endomorphisme bijectif de E. Donner une valeur de p satisfaisant (1). Justifier la réponse.
2. *Exemple 1.*
   Dans cette question, $n = 3$ et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à une base (e_1, e_2, e_3) et f est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

   a) Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. Peut-on choisir $p = 1$?
   b) Déterminer une base de $\ker(f^2)$ et une base de $\mathrm{Im}(f^2)$. justifier l'égalité

$$\mathrm{E} = \ker(f^2) \oplus \mathrm{Im}(f^2).$$

3. *Exemple 2.*
   Dans cette question, $n = 4$ et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ rapporté à une base (e_1, e_2, e_3, e_4), m un paramètre réel et f est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$. Peut-on choisir $p = 1$? On discutera selon les valeurs de m.

b) Déterminer le plus petit entier p vérifiant (1).

4. *Étude du cas général.*

Dans cette question, on suppose que l'endomorphisme f n'est pas bijectif.

a) Soit k un entier naturel ; justifier :

i) $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$,

ii) $\operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k)$.

b) Pour tout entier k, on note a_k la dimension de $\ker(f^k)$. Montrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Soit F l'ensemble des entiers naturels k tels que $a_k = a_{k+1}$. Montrer que F est non vide.

d) En déduire l'existence d'un entier p, supérieur ou égal à 1, qui vérifie les deux conditions :

- pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq p-1$, on a :
$$\ker(f^k) \neq \ker(f^{k+1})$$
- $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$

e) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à p, on a :
$$\ker(f^k) = \ker(f^p).$$

f) Déduire de ce qui précède l'égalité :
$$\mathrm{E} = \ker(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p)$$

Dans toute la suite du problème, p désigne les plus petit entier vérifiant (1) *et on admet que c'est celui qui a été obtenu à la question* 4 *de la partie A.*

Partie B

Dans cette partie on traite deux cas particuliers. Les deux questions sont indépendantes.

1. a) On suppose que $p = n$. Montrer que f^n est l'endomorphisme nul. Quelle est la dimension de $\ker(f)$?

b) *Un exemple*

Dans cette question, $n = 3$ et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à une base (e_1, e_2, e_3) et f est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que :
$$f(\varepsilon_1) = 0_{\mathrm{E}},\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1,\ f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$$

Écrire la matrice de f dans cette base et vérifier que $p = 3$.

2. On suppose ici que p est supérieur ou égal à 2 et que l'on a de plus $\ker(f^p) = \mathrm{E}$.
   a) Montrer que pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq p-1$, on peut définir un sous-espace vectoriel, non réduit au vecteur nul, supplémentaire de $\ker(f^k)$ dans $\ker(f^{k+1})$.
   b) En déduire l'existence d'une base de E dans laquelle f est représentée par une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes de la diagonale sont nuls.
   c) On reprend l'exemple 2 de la partie A avec $m = 0$. Déterminer, par permutation des vecteurs e_1, e_2, e_3 et e_4, une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé à A_0 a les propriétés définies à la question 2.b.

Partie C

Le but de cette partie est la détermination de p lorsque f vérifie une certaine relation polynomiale.
a désigne un réel non nul et f est un endomorphisme de E qui vérifie :

$$(2) \qquad \begin{cases} f \neq \mathrm{Id} \\ f^{n-1} \neq \theta \\ f^{n-1} \circ (f - a\,\mathrm{Id}) = \theta \\ \forall k \in \mathbb{N}\ (0 \leq k \leq n-2) \Rightarrow f^k \circ (f - a\,\mathrm{Id}) \neq \theta \end{cases}$$

1. Soit k un entier naturel non nul et x un élément de $\ker(f - a\,\mathrm{Id})$. Déterminer $f^k(x)$ en fonction de a, k et x.
2. a) Montrer que pour tout entier naturel k, on a :

$$\ker(f^k) \cap \ker(f - a\,\mathrm{Id}) = \{0_{\mathrm{E}}\}$$

   b) En déduire que $\ker(f^{n-1})$ et $\ker(f - a\,\mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E. (On pourra considérer leurs dimensions et utiliser l'égalité $f^{n-1} \circ (f - a\,\mathrm{Id}) = \theta$.)
3. On se propose ici de démontrer l'égalité $p = n - 1$.
   a) Supposant vérifiée l'hypothèse $p < n - 1$, justifier qu'alors $\ker(f^p)$ et $\ker(f - a\,\mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E. En déduire une contradiction avec (2).
   b) Montrer que p ne peut pas être égal à n et conclure.