DS-2 — Corrigé

Remarque : il y avait 18 points qui sont des savoir-faire qu'il ne faut *pas* rater. Les fautes de calcul ont été lourdement sanctionnées.

Partie A [/22]

SF [1] 1. f est bijectif, donc $\ker f = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} f = E$. La somme $\ker(f)+\operatorname{Im}(f)$ est donc directe et égale à E. Donc $p = 1$ convient.

2. Attention ! la base (e_1, e_2, e_3) n'est pas forcément la base canonique de $\mathbb{R}^3$!

SF [1] a) Calculs ! $xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \ker f$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si et seulement si $(x, y, z) = x(1, -1, -1)$. On a donc

$$\ker(f) = \operatorname{vect}\{e_1 - e_2 - e_3\}$$

SF [1] D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg}(f) = 2$. Une base de $\operatorname{Im}(f)$ comprend donc deux vecteurs. Une lecture de la matrice de f nous fournit :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}\{4e_1 - 2e_2 - 4e_3, -e_1 - e_2 + e_3\}$$

SF [1] Les sous-espaces $\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires si et seulement une réunion des bases de $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ est une base de E.

$$\alpha(e_1 - e_2 - e_3) + \beta(4e_1 - 2e_2 - 4e_3) + \gamma(-e_1 - e_2 + e_3) = 0$$
$$\iff$$
$$(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma(-3, 1, 1)$$

La famille $(e_1 - e_2 - e_3, 4e_1 - 2e_2 - 4e_3, -e_1 - e_2 + e_3)$ n'est pas libre[1], donc pas une base, donc $\operatorname{Im}(f)$ et $\ker(f)$ ne sont pas supplémentaires dans E. On a donc $p \geq 2$. Remarque : en fait on a $\ker(f) \subset \operatorname{Im}(f)$.

SF [3] b) Après calculs, la matrice de f^2 est :

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

On voit tout de suite que $\operatorname{rg}(f^2) = 1$ et $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{vect}\{-2e_1 - 2e_2 + 2e_3\}$. De plus, tout aussi clairement $e_1 + e_2$ et $2e_2 + e_3$ sont dans $\ker(f)$ et forment une famille libre

[1] On pouvait aussi calculer un déterminant...

d'un espace de dimension 2. Il s'agit donc d'une base de $\ker(f^2)$. Réunissons les deux familles et calculons leur déterminant relativement à la base (e_1, e_2, e_3) :

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Cette famille est donc une base de E. Les espaces $\mathrm{Im}(f^2)$ et $\ker(f^2)$ sont donc supplémentaires. On a donc $p = 2$.

3. a) En observant A_m on doit voir immédiatement que $\mathrm{rg}(f) = 2$ et qu'une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\{e_3, -e_1 + me_2 + e_4\}$. Le noyau de f est donc de dimension $4 - 2 = 2$ et une base de $\ker(f)$ est $\{me_1 + e_3, e_1 + e_4\}$. Maintenant le déterminant, relativement à la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, de la réunion de ces deux bases est : [3] **SF**

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & m & 1 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(développement selon la 1}^{\text{e}}\text{ colonne)}$$

$$= -m^2$$

Ce déterminant est non nul dès que $m \neq 0$. Donc si $m \neq 0$, la réunion d'une base de $\ker(f)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(f)$ est une base de E et on pourra prendre $p = 1$. Si, par contre, $m = 0$, on n'obtiendra pas de base et on aura $p \geq 2$.

b) Les cas $m \neq 0$ ont déjà été traités. Supposons donc $m = 0$. On a [2] **SF**

$$A_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{vect}\,\{-2e_3\}$ et $\ker(f^2) = \mathrm{vect}\,\{e_1, e_3, e_4\}$. Comme $\mathrm{Im}(f^2) \subset \ker(f^2)$, ces deux sous-espaces ne peuvent être supplémentaires !
Maintenant, $A_0^3 = 0$, donc $\ker(f^3) = \mathrm{E}$ et $\mathrm{Im}(f^3) = \{0\}$. La valeur $p = 3$ va donc convenir...
En conclusion

- si $m = 0$ alors $p = 3$;
- sinon $p = 1$.

4. a) Classiquissime !

i) Si $x \in \ker(f^k)$ alors $f^k(x) = 0_{\mathrm{E}}$, donc $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0_{\mathrm{E}}$, donc $x \in \ker(f^{k+1})$. [1] **SF**

ii) Si $x \in \mathrm{Im}(f^{k+1})$ alors il existe $u \in \mathrm{E}$ tel que $x = f^{k+1}(u)$. Alors $x = f^k(f(u))$ et donc $x \in \mathrm{Im}(f^k)$. [1] **SF**

b) Comme pour tous k, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$, on a, en passant aux dimensions : [1] **SF**

$$a_k \leq a_{k+1}.$$

[2] c) Si F était vide alors la suite (a_k) serait une suite strictement croissante d'entiers. Pour être plus précis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on aurait $a_{k+1} \geq 1 + a_k$ et donc $a_k \geq a_1 + k - 1$. Ce qui fait que $a_n \longrightarrow +\infty$.
Or, a_k est la dimension d'un sous-espace de E et donc $a_k \in [\![0, n]\!]$. La suite (a_k) ne peut donc tendre vers $+\infty$, c'est à dire que F ne peut être vide.

[1] d) Soit p le plus petit entier k tel que $a_k = a_{k+1}$ (le plus petit élément de F). On a donc :

- si $1 \leq k \leq p - 1$ alors $a_k \neq a_{k+1}$ et donc $\ker(f^k) \neq \ker(f^{k+1})$;
- si $k = p$, $a_p = a_{p+1}$ et, puisque $\ker(f^p) \subset \ker(f^{p+1})$ et qu'ils ont même dimensions, $\ker(f^p) = (f^{p+1})$.

[2] e) Soit $k \geq p$, Supposons que $\ker(f^k) = \ker(f^p)$, montrons que $\ker(f^{k+1}) = \ker(f^p)$. On a déjà
$$\ker(f^p) = \ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$$
Soit maintenant $x \in \ker(f^{k+1})$. On a donc $f^{k+1}(x) = 0_{\mathrm{E}}$. C'est-à-dire
$$f^k(f(x)) = 0_{\mathrm{E}}.$$
Donc $f(x) \in \ker(f^k)$, donc $f(x) \in \ker(f^p)$. Ce qui dit que $x \in \ker(f^{p+1})$. Or $\ker(f^{p+1}) = \ker(f^p)$, donc $x \in \ker(f^p)$.
La double inclusion est donc démontrée et on a bien $\ker(f^p) = \ker(f^{k+1})$.

[2] f) Déterminons l'intersection $\ker(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p)$. soit $x \in \mathrm{Im}(f^p) \cap \ker(f^p)$. On a donc :
$$f^p(x) = 0_{\mathrm{E}} \text{ et } \exists u \in \mathrm{E},\ x = f^p(u)$$
En calculant, on trouve
$$0 = f^p(x) = f^p(f^p(u)) = f^{2p}(u).$$
Donc $u \in \ker(f^{2p})$. D'après la question précédente $\ker(f^{2p}) = \ker(f^p)$, donc u est dans le noyau de f^p. Dit autrement : $x = f^p(u) = 0_{\mathrm{E}}$. La somme $\ker(f^p) + \mathrm{Im}(f^p)$ est donc directe. En calculant la dimension de la somme, on a
$$\dim(\ker(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)) = \dim(\ker(f^p)) + \dim(\mathrm{Im}(f^p)) = \dim(\mathrm{E})$$
Donc $\ker(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^p)$ sont supplémentaires.

Partie B [/9]

[1] 1. a) Observons à nouveau les arguments avancés dans la question A.4.c. On y voit notamment que $a_n \geq a_1 + n - 1 \geq n - 1$. Or $a_n \in [\![0, n]\!]$, donc $a_1 = \dim(\ker(f))$ vaut 0 ou 1 et a_n vaut $n - 1$ ou n. Le cas $\dim(\ker(f)) = 0$ a déjà été couvert à la question A.1. et dans ce cas on doit avoir $p = 1 \neq n$. Donc, si $p = n$ alors $\ker(f)$ est de dimension 1 et $\ker(f^p) = n$ ce qui équivaut à dire que $f^p = \theta$.

b) Cherchons $\ker(f)$. Après calculs, $\ker(f) = \text{vect}\{e_1 + e_2 + e_3\}$. On peut donc choisir $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3$. [1] **SF**

Cherchons $\ker(f^2)$. On sait que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et que ε_2 est un vecteur de $\ker(f^2)$ qui n'est pas dans $\ker(f)$. La matrice de f^2 est : [0,5]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On a donc $\ker(f^2) = \text{vect}\{\varepsilon_1, e_1 - e_2\} \neq \ker(f)$. On vérifie que $f(e_1 - e_2) = \varepsilon_1$ et on peut choisir $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$.

Pour ε_3, on remarque que ε_3 doit être un vecteur de $\ker(f^3) = \mathrm{E} \neq \ker(f^2)$ (pourquoi ?) et non coplanaire à ε_1 et ε_2. On peut, par exemple, choisir $\varepsilon_3 = e_1$. On vérifie que $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$. [0,5]

La matrice de la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) est [1]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est clairement une matrice de rang 3 donc inversible, donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est [1]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Des indications sur les noyaux de f, f^2 et f^3, on a obligatoirement $p = 3$.

2. a) Par définition de p (voir A.4.a-d), on a pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et $\ker(f^k) \neq \ker(f^{k+1})$. Il existe donc un supplémentaire non nul à $\ker(f^k)$ dans $\ker(f^{k+1})$. Notons V_{k+1} ce supplémentaire. On a donc [1]

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ \ker(f^{k+1}) = \ker(f^k) \oplus V_{k+1} \text{ et } \dim(V_{k+1}) \geq 1.$$

b) On a donc, en posant $V_1 = \ker(f)$, [2]

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1, p-1]\!], \quad \ker(f^k) &= V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k \\ \mathrm{E} = \ker(f^p) &= V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_p. \end{aligned}$$

Considérons une base $\mathcal{B}'$ de E adaptée à cette décomposition. Par construction, si $x \in V_k$ alors $f^k(x) = 0$, donc $f(x) \in \ker(f^{k-1}) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_{k-1}$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ sera donc triangulaire supérieure par blocs avec des blocs diagonaux nuls.

[1] c) On a

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Permuter les vecteurs de (e_1, e_2, e_3, e_4) c'est *en même temps* permuter les lignes et les colonnes de A_0. Considérons la base $\mathcal{B}'' = (e_3, e_1, e_4, e_2)$. On a

$$A_0' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En effet :

$$\begin{aligned} f(e_3) &= 0_{\mathrm{E}} \\ f(e_1) &= e_3 + 0e_1 + 0e_4 + 0e_2 \\ f(e_4) &= -e_3 + 0e_1 + 0e_4 + 0e_2 \\ f(e_2) &= 0e_3 - e_1 + e_4 + 0e_2 \end{aligned}$$

Partie C [/10]

SF [1] 1. Savoir refaire ! Par une récurrence simple, si $x \in \ker(f - a\,\mathrm{Id})$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = a^k x.$$

SF [1] 2. a) Soit $x \in \ker(f^k) \cap \ker(f - a\,\mathrm{Id})$. On a à la fois $f^k(x) = 0_{\mathrm{E}}$ et $f(x) = ax$. Donc $a^k x = 0$. Donc ,comme $a \neq 0$, $x = 0_{\mathrm{E}}$.

[2] b) La somme $\ker(f^{n-1}) + \ker(f - a\,\mathrm{Id})$ est donc directe. Comme, d'après la troisième assertion de (2), $\mathrm{Im}(f - a\,\mathrm{Id}) \subset \ker(f^{n-1})$, on a

$$\dim(\mathrm{Im}(f - a\,\mathrm{Id})) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\ker(f - a\,\mathrm{Id})) \leq \dim(\ker(f^{n-1})).$$

Maintenant :

$$\begin{aligned} \dim(\ker(f^{n-1}) \oplus \ker(f - a\,\mathrm{Id})) &= \dim(\ker(f^{n-1})) + \dim(\ker(f - a\,\mathrm{Id})) \\ &\geq \dim(\mathrm{E}) - \dim(\ker(f - a\,\mathrm{Id})) + \dim(\ker(f - a\,\mathrm{Id})) \\ &\geq \dim(\mathrm{E}) \end{aligned}$$

Comme on a toujours $\dim(\ker(f^{n-1}) \oplus \ker(f - a\,\mathrm{Id})) \leq \dim(\mathrm{E})$, on a l'égalité des dimensions et donc :

$$\ker(f^{n-1}) \oplus \ker(f - a\,\mathrm{Id}) = \mathrm{E}.$$

3. a) Si $p < n-1$ alors, d'après A.4.e, $\ker(f^p) = \ker(f^{n-1})$ et donc, d'après la question précédente, $\ker(f^p)$ et $\ker(f - a\,\mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans E. [1]
Si tel est le cas, montrons que $f^k \circ (f - a\,\mathrm{Id}) = \theta$ ce qui contredit la quatrième assertion de (2). Soit $x \in \mathrm{E}$, on peut le décomposer en $y + z$ avec $y \in \ker(f^k)$ et $z \in \ker(f - a\,\mathrm{Id})$. On a alors [2]

$$\begin{aligned} f^k \circ (f - a\,\mathrm{Id})(x) &= f^k(f(y) - ay)) + f^k(0_{\mathrm{E}}) \\ &= f^{k+1}(y) - af^k(y) \\ &= 0_{\mathrm{E}} \end{aligned}$$

D'où la contradiction.

b) Si $p = n$ alors, (B.1), $f^n = 0$ et donc, d'après la troisième assertion de (2), on peut écrire $f^n - af^{n-1} = \theta$, ou encore $f^{n-1} = \theta$ ce qui contredit la seconde assertion de (2). On conclut donc que la seule valeur possible pour p est $n - 1$. [2]