DS-1
Mercredi 11 septembre 2019
durée : 4h

I Premier Problème

Partie A

Soit ω une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 1, positive et non nulle.

1. Justifier les assertions suivantes :
   a) La fonction ω est bornée.
   b) On a : $A = \displaystyle\int_0^1 \omega(t)\,\mathrm{d}t > 0$.
   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \omega(t)\,\mathrm{d}t = A$.

Dans le reste de cette partie, on considère une fonction f, continue par morceaux, positive et décroissante sur $[N, +\infty[$ avec $N \in \mathbb{N}^*$. On note $g = f\omega$.

2. On suppose que $\displaystyle\int_N^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.
   a) Justifier *brièvement* que f est intégrable sur $[N, +\infty[$.
   b) En déduire que g est intégrable sur $[N, +\infty[$.

3. On suppose maintenant que $\displaystyle\int_N^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   a) Montrer que pour tout entier $k \geq N$:
$$Af(k+1) \leq \int_k^{k+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leq Af(k).$$
   b) En déduire une majoration, pour un entier $m \geq N+1$, de $\displaystyle\sum_{k=N}^{m} f(k)$.
   c) En déduire que $\displaystyle\int_N^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On a donc montré la propriété suivante (qu'on pourra utiliser dans le reste de ce problème) :

> Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[N, +\infty[$ et ω une fonction périodique de période 1, positive et non nulle.
>
> Alors les intégrales $\displaystyle\int_N^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_N^{+\infty} f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Partie B

1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x}\,\mathrm{d}x$ convergent.

On considère la fonction φ définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}\left(1 + \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}\right).$$

2. a) Montrer, qu'au voisinage de l'infini, $\varphi(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sin(\pi x)}{x}$.

   b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}$ diverge.

   c) On considère la fonction ψ définie sur $[1, +\infty[$ par : $\psi(x) = \dfrac{\sin^2(\pi x)}{x\ln(x)}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

   d) Monter que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

   e) Quelle conclusion peut-on tirer de la comparaison des résultats des questions 1, 2.a et 2.d ?

II Deuxième problème

Soit $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions définies, continues et à valeurs réelles sur $\mathbb{R}_+$. Pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$, on note F sa primitive qui s'annule en 0.

On note E le sous-ensemble des fonctions f de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Pour $f \in \mathrm{E}$, on note $I(f)$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Partie A Étude de quelques propriétés de l'application $f \longmapsto I(f)$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Déterminer les fonctions de E **positives** telles que $I(f) = 0$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$ **positive**.

   a) Quel est le sens de variations, le signe de F ?

   b) Justifier que pour tout $A > 0$:

$$\int_0^A \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{F(A)}{1+A} + \int_0^A \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

c) On suppose, dans cette question, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer qu'alors $f \in \mathrm{E}$.

d) On suppose, dans cette question, que $f \in \mathrm{E}$.

i) Justifier que

$$\forall A > 0,\ \frac{F(A)}{1+A} \leq \int_A^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

ii) En déduire $\displaystyle\lim_{A \longrightarrow +\infty} \frac{F(A)}{1+A}$.

iii) En déduire enfin que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On a donc montré que si f est positive alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $f \in \mathrm{E}$.

On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

4. a) Montrer que f définie par $f(x) = \sin(x) + (1+x)\cos(x)$ est un élément de E.

b) Est-ce que le résultat de la question 3 tient toujours avec f ?

5. Pour $f \in \mathrm{E}$ montrer, en justifiant l'existence de l'intégrale, la relation :

$$I(f) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{F(t) + F(1/t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Partie B L'objet de cette partie est le calcul de $I(f)$ pour une fonction f particulière

On note J et K les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. a) Montrer que l'intégrale K converge.

b) Montrer alors que J converge et que $J = K$.

2. a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$,

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$,

$$\ln(1+t) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1} + R_n(x)$$

où $R_n(x)$ vérifie : $\forall x \in [0,1]$, $|R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

c) En déduire que $K = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell^2}$.

On admet que $J = K = -\frac{\pi^2}{12}$.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

3. a) Montrer que $f \in \mathrm{E}$.
   b) Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que $I(f) = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\ln(t)}{1+t}\right]^2 \mathrm{d}t - K$.

   Indication : On pourra calculer $f(x) - \frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x})$ et en déduire $F(x) + F(1/x)$.
5. Exprimer J en fonction de l'intégrale $\int_0^1 \left[\frac{\ln(t)}{1+t}\right]^2 \mathrm{d}t$. en déduire $I(f)$.