DS-1 — Corrigé

Les annotations de ce corrigé signifient :

SF savoir faire ;

ⓒ question de cours (à peine déguisée) ;

ⓐ question notée atomiquement : soit tout est juste et il y a les points, soit aucun point n'est alloué...

Dans vos copies, vous trouverez les annotation suivantes :

Ⓒ voir le corrigé ;

Ⓡ rédaction problématique ;

Ⓔ voir/lire l'énoncé ou non conforme à l'énoncé.

SF savoir faire.

Non sequitur – littéralement : « qui ne suit pas ». Se dit d'une déduction qui n'est pas la conséquence d'une cause. Par exemple : « mon cheval est blanc donc le ciel est bleu ».

I Premier problème [/12]

Partie A [/7]

[0,5] 1. a) La fonction ω est périodique de période 1. On a donc $\omega(\mathbb{R}) = \omega([0,1])$. Comme ω est continue, elle est bornée sur le segment $[0,1]$.

[0,5] b) On a $A \geq 0$ car ω est positive sur le segment $[0,1]$. Comme ce segment n'est pas réduit à un point et que ω est continue et non identiquement nulle, $A > 0$.

[0,5] c) En faisant le changement de variables $t = s + n$, on a :

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} \omega(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \omega(s+n)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \omega(s)\,\mathrm{d}s \quad (\omega \text{ est 1-périodique})\end{aligned}$$

[0,5] 2. a) La fonction f est positive, donc « converge » = « converge absolument ». Donc, puisque $\displaystyle\int_N^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, cette intégrale converge absolument et donc f est intégrable sur $[N, +\infty[$.

b) La fonction ω est bornée, donc on peut écrire : [1]

$$g(t) = f(t)\omega(t) \underset{t\longrightarrow+\infty}{=} O(f(t))$$

Le théorème de comparaison par O permet de conclure que g est intégrable sur $[N, +\infty[$.

3. a) Comme f est décroissante et que ω est positive, [0,5]

$$\forall t \in [k, k+1], \quad f(k+1)\omega(t) \leq g(t) \leq f(k)\omega(t)$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, on obtient le résultat annoncé. [0,5]

b) En sommant : [2]

$$A\sum_{k=N}^{m} f(k+1) \leq \int_N^{m+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leq A\sum_{k=N}^{m} f(k)$$

En réindiçant :

$$A\sum_{k=N+1}^{m+1} f(k) \leq \int_N^{m+1} g(t)\,\mathrm{d}t$$

On obtient donc que pour tout $m \geq N+1$ (remplacer $m+1$ par m) :

$$-Af(N) + A\sum_{k=N}^{m} f(k) \leq \int_N^{m} g(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc :

$$\sum_{k=N}^{m} f(k) \leq f(N) + \frac{1}{A}\int_N^{m} g(t)\,\mathrm{d}t$$

c) Comme g est positive et intégrable sur $[N, +\infty[$, on a alors : [1]

$$\forall m \geq N+1, \quad \sum_{k=N}^{m} f(k) \leq f(N) + \frac{1}{A}\int_N^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Ce qui permet de dire que, puisque ses sommes partielles sont majorées, la série à termes positifs $\sum\limits_{k\geq N} f(k)$ converge

Partie B [/5]

1. Fait en cours ! On a, pour tout $A \geq 1$: [1] **SF**

$$\int_1^A \frac{\sin(\pi x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos(\pi x)}{\pi x}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos(\pi x)}{\pi x^2}\,\mathrm{d}x$$

On voit donc que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature. Or, pour tout $x \geq 1$,

$$\left|\frac{\cos(\pi x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Comme la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, par comparaison par $\leq$, la fonction $x \longmapsto |\dfrac{\cos(\pi x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
En conclusion $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge (absolument) et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

SF [0,5] 2. a) Comme $\dfrac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$ a pour limite 0 quand $x \longrightarrow +\infty$, on a, par définition de $\sim$,

$$\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sin(\pi x)}{x}.$$

[1] b) Tout d'abord :

$$\int_2^X \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(\ln(X)) - \ln(\ln(2))$$

Donc, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ diverge.

[1] c) La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est clairement décroissante sur $[1, +\infty[$, donc, en appliquant la partie A, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \psi(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature...

SF [1] d) La fonction φ est la somme de deux fonctions, l'une dont l'intégrale sur $[1, +\infty[$ converge, l'autre dont l'intégrale sur le même intervalle diverge. On a donc

$$\int_1^X \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_1^X \frac{\sin(\pi x)}{x}\,\mathrm{d}x}_{\text{a une limite finie}} + \underbrace{\int_1^X \psi\,\mathrm{d}x}_{\text{n'a pas de limite finie}}$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

[0,5] e) La conclusion qu'on peut tirer des résultats précédents est que le théorème de comparaison par $\sim$ n'est pas valable quand on remplace intégrable par « l'intégrale converge »...

II Deuxième problème [/22]

Partie A [/11]

SF© [1] 1. Examinons les trois points qui caractérisent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$.

- E est, par définition, un sous-ensemble de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$.
- E est non vide, en effet la fonction nulle est un élément de E.

- Soient f et g deux fonctions de E et λ un réel. Notons $h = \lambda f + g$ et F, G et H les primitives s'annulant en 0 de f, g et h respectivement.

  De la linéarité de l'intégrale, on tire que $H = \lambda F + G$. Comme f et g sont dans E, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{G(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ convergent. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\lambda F(t)+G(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{H(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge, c'est-à-dire $h = \lambda f + g \in$ E.

2. Si la fonction f est positive, alors, pour tout $x \geq 0$, $F(x) \geq 0$. Donc la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{F(t)}{(1+t)^2}$ est : [1] **SF**

   (a) continue sur $\mathbb{R}_+$ (en fait $\mathcal{C}^1$) ;

   (b) positive sur $\mathbb{R}_+$.

   De ce fait si $I(f) = 0$ alors pour tout $t \geq 0$, $\dfrac{F(t)}{(1+t)^2} = 0$, c'est à dire $F = 0$ et donc $f = F' = 0$.

3. a) Comme $F' = f \geq 0$, F est croissante et comme $F(0) = 0$, F est positive sur $\mathbb{R}_+$ [1]

   b) La formule demandée s'obtient par intégration par parties. En effet les fonction F et $t \longmapsto -\dfrac{1}{1+t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donc pour tout $A > 0$, on a bien la formule annoncée. [1]

   c) Si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge alors puisque la fonction $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{1+t}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$, l'application $A \longmapsto \displaystyle\int_0^A \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $A \geq 0$: [1]

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t &\geq \int_0^A \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &\geq \underbrace{\frac{F(A)}{1+A}}_{\geq 0} + \int_0^A \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &\geq \int_0^A \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

   Donc l'application $A \longmapsto \displaystyle\int_0^A \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$. Donc, d'après le théorème fondamental de l'intégration des fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge, c'est-à-dire $f \in$ E.

   d) i) La fonction F est croissante, donc pour tout $t \geq A$, $F(A) \leq F(t)$. On a donc : [1]

$$\int_A^{+\infty} \frac{F(A)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_A^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

et donc :

$$F(A)\Big[-\frac{1}{1+t}\Big]_A^{+\infty} \leq \int_A^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

[1] ii) Comme F est positive et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge, on peut écrire :

$$0 \leq \frac{F(A)}{1+A} \leq \int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{A} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

À l'aide du théorème des gendarmes, on obtient alors :

$$\lim_{A\longrightarrow+\infty} \frac{F(A)}{1+A} = 0.$$

[1] iii) On a donc, en faisant tendre $A \longrightarrow +\infty$:

$$\int_0^A \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{F(A)}{1+A}}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\int_0^A \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t}_{\text{a une limite}}$$

et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ esxiste

SF [1] 4. a) On calcule et on trouve $F(x) = (1+x)\sin(x)$. Donc d'après l'indication, $f \in \mathrm{E}$ car $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

[1] b) On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^A \frac{(1+t)\cos(t)+\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^A \cos(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^A \frac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \cos(A) - 1 + \int_0^A \frac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^A \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est la somme d'une fonction qui n'a pas de limite quand $A \longrightarrow +\infty$ et d'une intégrale qui, elle, a une limite. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ diverge donc.
Le résultat de la question 3 ne tient donc pas si f est de signe variable.

[1] 5. Calculons pour $A > \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^A \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{1/\varepsilon}^{1/A} \frac{F(1/u)}{\left(1+\frac{1}{u}\right)^2} \cdot \Big(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\Big) \quad (u = 1/t) \\
&= \int_{1/A}^{1/\varepsilon} \frac{F(1/u)}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Donc, en faisant tendre $\varepsilon \longrightarrow 0$ et $A \longrightarrow +\infty$, on obtient :

$$I(f) = \int_0^{+\infty} \frac{F(1/t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Le résultat demandé est alors évident.

Partie B [/11]

1. a) La fonction $t \longmapsto -\dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$. Or, quand $t \longrightarrow 0$, $-\dfrac{\ln(1+t)}{t} \longrightarrow -1$, donc la fonction $t \longmapsto -\dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 et l'intégrale K converge (faux problème). [1] **SF**

   b) Soit $\varepsilon > 0$. Les fonctions $t \longmapsto \ln(t)$ et $t \longmapsto \ln(1+t)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, 1]$. On peut donc intégrer par parties pour obtenir : [1]

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t)\ln(1+t)\Big]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

   Or, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, $\ln(\varepsilon)\ln(1+\varepsilon) \underset{0}{\sim} \ln(\varepsilon)\cdot\varepsilon \longrightarrow 0$.
   Donc en faisant tendre ε vers 0, on obtient le résultat annoncé, à savoir J converge et $J = K$.

2. a) Formule classique ! [1] **SF@**

$$\forall t \neq -1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}...$$

   b) On intègre sur $[0,t]$: [1]

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{1+s} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^t \frac{s^n}{1+s}\,\mathrm{d}s$$

   Si on pose $R_n(t) = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^t \frac{s^n}{1+s}\,\mathrm{d}s$, on a, pour $x \in [0,1]$:

$$|R_n(x)| \leq \int_0^x \frac{s^n}{1+s}\,\mathrm{d}s \leq \int_0^x s^n\,\mathrm{d}s = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

   c) On a donc : [1]

$$\begin{aligned} K &= -\int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1} + R_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 R_n(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Mais $\left|\int_0^1 R_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et donc le reste intégral tend vers 0. On en déduit donc que $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$ converge et :

$$K = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell^2}$$

SF [2] 3. a) Servons nous du A.3. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+$ donc $f \in \mathrm{E}$ si et seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t$ converge.

La fonction $h : x \longmapsto \frac{f(x)}{1+x}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$

Il n'y a pas de problème en 0 (faux problème...) et :

$$t^{3/2} \cdot \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{} 0$$

Donc, comparant à un exemple de Riemann au voisinage de $+\infty$, la fonction h est intégrable sur $[1,+\infty[$, et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge (absolument).

Finalement l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge et donc $f \in \mathrm{E}$.

[1] b) Par comparaison. Pour tout $t > 0$,

$$f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t} \geq \frac{\ln(1+t)}{1+t}$$

Donc, pour tout $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} F(x) - F(1) &= \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geq \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\Big(\ln(1+t)\Big)^2\right]_1^x \\ &= \Big(\ln(1+x)\Big)^2 - \Big(\ln(2)\Big)^2 \end{aligned}$$

Par minoration, on a $F(x) - F(1)$ qui tend vers $+\infty$. Le résultat demandé est alors clair.

[3] 4. Procédons comme demandé. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{x^2} f\Big(\frac{1}{x}\Big) &= \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\ln(1+1/x)}{1/x} \\ &= \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \\ &= \frac{1}{x}\ln(x) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Big(\ln(x)\Big)^2\right) \end{aligned}$$

Donc puisque $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(F(x)+F(1/x)\Big) = f(x) - \dfrac{1}{x^2} f\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$, on a :

$$F(x)+F(1/x) = 2F(1) + \int_1^x \left(f(t) - \frac{1}{t^2} f\Big(\frac{1}{t}\Big)\right) \mathrm{d}t = 2F(1) + \frac{1}{2}\Big(\ln(x)\Big)^2$$

Or $F(1) = -K$. On a donc la formule :

$$F(x)+F(1/x) = \frac{1}{2}\Big(\ln(x)\Big)^2 - 2K.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$ converge et vaut 1, on a :

$$\begin{aligned} I(f) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{F(t)+F(1/t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\Big(\ln(x)\Big)^2 - 2K}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

La formule demandée est alors claire...

5. Euh... La question n'aurait pas du être là : nous verrons dans un cours ultérieur (séries de fonctions) comment la traiter.