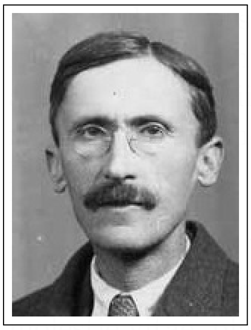
Variables aléatoires

Paul Levy (1887–1971)



Mathématicien français[1], il est surtout connu pour ses travaux en probabilités.
Ancien élève du lycée Saint Louis il intègre[2] l'école polytechnique en 1905 dont il sort major en intégrant le corps des mines.
Il sera successivement professeur à l'école des mines (1913), puis professeur d'analyse à l'école polytechnique[3]. Ses travaux de recherche portent principalement sur l'addition de variables aléatoires et sur le comportement d'une somme d'un grand nombre de variables. Il explore notamment :

- Une classe de lois : les lois stables. La somme de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi stable est une fonction affine d'une variable aléatoire suivant cette même loi stable[4].
- Le théorème de la limite centrée qui décrit le comportement d'une moyenne d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi. Le résultat est qu'avec des hypothèses simples[5] la distribution suivie par une telle somme est décrite par une courbe en cloche[6]
- Le mouvement brownien : l'évolution aléatoire d'une particule[7].

Table des matières

[1] Merci qui ? Ben pas mamie Nova, mais MacTutor, Wikipedia et Figures from the History of Probability.
[2] Il était premier au concours d'entrée à l'école normale supérieure et second au concours d'entrée à l'X. Il ne pouvait guère mieux faire. En fait si : regardez son rang de sortie de l'X.
[3] De 1920 à sa retraite en 1959.
[4] Ce n'est pas tout à fait la vraie définition, mais il faut rester simple. Occam quand tu nous tiens...
[5] Elles doivent avoir une variance.
[6] Gaussienne. Demandez aux EC2.
[7] Ou d'un pochetron, d'un cours de bourse, d'une mouche et j'en passe.

Les savoir faire

- Savoir trouver la loi d'une variable aléatoire, d'un couple ou d'un vecteur de variables aléatoires.
- Savoir déterminer si une variable aléatoire a une espérance, une variance.
- Savoir calculer l'espérance d'une variable aléatoire.
- Savoir utiliser la formule du transfert.

Du neuf avec l'ancien

Nouveauté

Beaucoup d'énoncés des parties I à III sont très proches (voire les mêmes) que ceux du cours de première année. Il reste cependant un petit nombre d'idées nouvelles ou d'extensions de notions connues. Celles-ci sont présentées par les symboles ⓝ et/ou par une marque dans la marge.
On peut donc se contenter de lire rapidement ce polycopié et de réserver son attention aux vraies nouveautés. La partie IV est elle du neuf...

I Variables aléatoires discretes

1 Ensembles particuliers

a Ensembles dénombrables

Nouveauté

Définition 1

Un ensemble U est *dénombrable* s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ vers U. C'est à dire si U est infini et qu'on peut numéroter chaque élément de U.
Un ensemble V est *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

Remarques

1. L'idée centrale sert celle de numéroter les éléments.

2. La définition impose aux numéros d'être contigus et de commencer en 0. En pratique, on peut relâcher cette condition en imposant aux numéros d'être distincts et non bornés : on peut toujours renuméroter pour boucher les trous. Par exemple les entiers pairs sont numérotables par leur valeur ou en écrivant $\{2p \mid p \in \mathbb{N}\}$...
3. La remarque précédente permet de montrer d'indiquer qu'une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

Exemples 1

1. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
2. Extension du précédent : si A et B sont dénombrables alors $A \times B$ est dénombrable.
3. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
4. L'intervalle $[0, 1]$, ainsi que $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.

b Ensembles définis par une fonction

Définition 2

Soit f une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B. Soit V un sous ensemble de B. On définit l'ensemble $\{f \in V\}$ (aussi noté $(f \in V)$) par :

$$\{f \in V\} = \{a \in A \mid f(a) \in V\}$$

Remarques

1. On a donc, par définition $\{f \in V\} = f^{-1}(V)$. C'est un sous-ensemble de A.
2. Quand V est le singleton $\{v\}$ alors on note :
$$\{f = v\} = \{f \in \{v\}\}$$
3. Quand $B = \mathbb{R}$ et que $x_0 \in \mathbb{R}$, on note :
$$\{f \leq x_0\} = \{f \in]-\infty, x_0]\}$$
$$\{f < x_0\} = \{f \in]-\infty, x_0[\}$$
$$\dots$$

2 Variables aléatoires

À partir de maintenant et sauf mention contraire, on suppose qu'on utilise un espace probabilisable noté $(\Omega, \mathcal{A})$. On munira souvent cet espace d'une probabilité $\mathbb{P}$. Un événement sera donc toujours un élément de $\mathcal{A}$ (et donc aussi un sous-ensemble de Ω).

Nouveauté

Définition 3 (variable aléatoire discrète)

Une fonction X définie sur Ω et a valeurs dans un ensemble $\mathcal{E}$ est une *variable aléatoire discrète* si et seulement si

(a) L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est au plus dénombrable ;

(b) Pour tout $U \subset X(\Omega)$, l'ensemble $\{X \in U\}$ est un événement.

Remarques

1. Il faut bien comprendre que le terme *variable aléatoire* est un terme historique et qu'une variable aléatoire n'est ni variable ni aléatoire : en tout état de cause on peut travailler comme si cette expression était un nouveau mot composé[8]...
2. L'idée de base est qu'à chaque issue possible on associe une valeur et que cette association permette de calculer des probabilités.
3. La notion de variable aléatoire ne dépend pas de la probabilité choisie.
4. On peut donc écrire :
$$X(\Omega) = \{x_k\}_{k \in D} \text{ où } D \subset \mathbb{N}.$$
Dans cette écriture on peut, quitte à renuméroter, choisir $D = [\![1, n]\!]$ (cas fini) ou $D = \mathbb{N}$ (cas dénombrable).

Remarque À partir de maintenant « variable aléatoire » = « variable aléatoire discrète ».

Définition 4 (variable aléatoire discrète réelle)

Une variable aléatoire discrète X est une *variable aléatoire discrète réelle* si et seulement si elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est à dire $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$.

Nouveauté

Propriété 1

Soit X une variable aléatoire et f une fonction définie sur tout $X(\Omega)$. L'application Y définie par :
$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = f(X(\omega))$$
est une variable aléatoire. On la notera $Y = f(X)$.

3 Loi

[8]L'allemand le fait en un mot : « Zufallsvariable » ou « Zufallsgröße ». Comme ça on n'a pas envie de couper.

Définition 5

Soit X une variable aléatoire discrète. La *loi* de X est la donnée :

(a) de l'ensemble image $X(\Omega) = \{a_k\}_{k \in D}$;

(b) des nombres :
$$\mathbb{P}(\{X = a_k\}) \text{ pour } k \in D$$

Propriété 2

Soit X une fonction définie sur l'ensemble Ω. Supposons que $X(\Omega) = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et qu'on dispose d'une suite de réels positifs $\left(p_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$ alors il existe une tribu $\mathcal{A}$ et mesure de probabilité $\mathbb{P}$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\{X = a_k\}) = p_k.$$

Remarque On a une version similaire quand $X(\Omega) = \{a_k\}_{k \in [\![1,n]\!]}$, mais là il n'est pas nécessaire de parler de série.

4 Fonction de répartition d'une variable alétoire réelle

Définition 6 (fonction de répartition)

La fonction de répartition de la variable aléatoire discrète réelle X est la fonction F_X définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\})$$

Propriété 3

Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Sa fonction de répartition F_X

(1) est croissante ;

(2) est telle que $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$, $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$

Remarques
En exercice on peut montrer que si $X(\Omega) = \{a_k\}_{k \in D}$ alors :

1. $F_X(x) = \displaystyle\sum_{k \text{ tels que } a_k \leq x} \mathbb{P}(\{X = a_k\})$;
2. F_X est continue à droite ;
3. F_X est constante sauf aux points a_k ;

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} F_x(x) = \mathbb{P}(\{X < a\})$;

5. Que pour tout a, $\mathbb{P}(\{X = a\}) = F_X(a) - \lim\limits_{u \longrightarrow a^-} F_X(u)$

6. On voit que les points 1 et 5 lient loi et fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète réelle. En fait, la connaissance de l'une donne celle de l'autre.

II Espérance : fondements

1 Définition

Nouveauté

Définition 7

Soit X une variable aléatoire discrète réelle telle que $X(\Omega) = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. La variable aléatoire X a une *espérance* si et seulement si la série $\sum a_k \mathbb{P}(\{X = a_k\})$ converge **absolument**. Dans le cas ou cette série converge, sa somme sera l'*espérance* de X, notée $\mathbb{E}(X)$. On aura donc :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbb{P}(\{X = a_k\}).$$

Remarques

1. La définition est a priori indépendante de la numérotation choisie pour $X(\Omega)$

2. Bien entendu si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, on peut se limiter à la convergence, la série étant à termes positifs.

3. On voit bien que dans le cas ou $X(\Omega)$ est fini[9], on a une définition similaire. Comme la somme qui intervient est finie, une variable aléatoire discrète finie a toujours une espérance. De plus si on note $\mathbb{1}$ la variable aléatoire constante égale à 1 alors :

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}) = 1.$$

4. Intuitivement, on peut interpréter l'espérance comme la valeur moyenne de la variable aléatoire.

   Pour être plus précis, si on suppose que $\Omega = \{\omega_k\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k X(\omega_k)\mathbb{P}(\{\omega_k\})$$

   Pour autant qu'on puisse donner un sens à la somme ci-dessus.

[9] On dit alors que X est réelle finie.

2 Propriétés

Propriété 4

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant une espérance. Si $X \geq 0$ alors on a $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

Remarques

1. Attention X est une fonction. Donc $X \geq 0$ veut dire : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq 0$.
2. Pour l'instant on n'a pas de réciproque, mais cela viendra lorsqu'on introduira deux variables aléatoires.
3. Avec la même hypothèse :
$$X \geq a \Rightarrow E(X) \geq a$$
$$X \leq b \Rightarrow E(X) \leq b$$
4. Cette propriété permet de vérifier ses calculs[10].

Propriété 5

Si X est une variable aléatoire discrète réelle **bornée** alors X a une espérance.

Remarques

1. On revoit qu'une variable réelle finie a une espérance : elle est bornée car elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
2. Si on a $a \leq X \leq b$ alors (cf propriété 4) $a \leq \mathbb{E}(x) \leq b$.

Propriété 6 (linéarité)

Si X et Y ont une espérance, il en est de même de $aX + Y$. On a :

$$\mathbb{E}(aX + Y) = a\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Remarque En d'autre termes : l'ensemble des variables aléatoires définis sur $(\Omega, \mathcal{A})$ qui admettent une espérance est un espace vectoriel et l'espérance est une forme linéaire sur celui-ci.

3 Indicatrices

[10] Intuitivement : la moyenne reste dans les clous...

Nouveauté

Définition 8

Soit A un événement. La *variable aléatoire indicatrice* de l'événement A, notée $\mathbb{1}_A$ est définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque On voit tout de suite que $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli : celle de paramètre $\mathbb{P}(A)$. Notamment $\mathbb{1}_A$ a une espérance et $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

Exemples 2

1. Si A et B sont deux événements alors $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$. Que valent $\mathbb{1}_{\overline{A}}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$?
2. Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance alors $\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}(X)$. On utilise $\mathbb{1}_A$ où $A = \{X \geq 1\}$.
3. Si X est une variable aléatoire admettant une espérance et telle que $\mathbb{E}(|X|) = 0$ alors X est presque certainement nulle ; c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = 0) = 1$. On se sert de la suite croissante d'événements $(A_n)_{n\geq 1}$ définie par $A_n = \{|X| \geq 1/n\}$.

III Couples et vecteurs

1 Lois d'un couple

Définition 9

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Notons $X(\Omega) = \{a_k\}_{k\in D}$ et $Y(\Omega) = \{b_k\}_{k\in D'}$.
La *loi conjointe* du couple (X, Y) est définie par :

$$\forall (i,j) \in D \times D', \quad p_{i,j} = \mathbb{P}(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\})$$

Remarques

1. On voit qu'on a un cas particulier de variable discrète. On peut en effet considérer la variable $Z = (X, Y)$. Cette variable est discrète et $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Notamment, si $(a_k, b_\ell) \notin Z(\Omega)$ alors $p_{k,\ell} = 0$.
2. On peut alors définir plusieurs lois à partir de la loi conjointe :
   (a) la *loi (marginale)* de X : $p_{i\bullet} = \mathbb{P}(X = a_i) = \sum_{j\in D'} p_{i,j}$. On utilise le fait que le système $\Big(\{Y = b_j\}\Big)_{j\in D'}$ est un système complet d'événements. Ce n'est rien d'autre que la loi de X.
   (b) la *loi (marginale)* de Y : $p_{\bullet j} = \mathbb{P}(Y = b_j) = \sum_{i\in D} p_{i,j}$.

(c) Si $\mathbb{P}(Y = b_k) \neq 0$, on peut définir la loi de X conditionnée par l'événement $\{Y = b_k\}$. Elle est donnée par les nombres

$$\mathbb{P}_{\{Y=b_k\}}(X = a_i) = \frac{p_{i,k}}{p_{\bullet k}}$$

2 Indépendances

Définition 10 (indépendance d'un couple)

Avec les notation de la définition 9. Le couple (X, Y) est indépendant si et seulement si pour tout $(i, j) \in D \times D'$,

$$\mathbb{P}(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}) = \mathbb{P}(X = a_i) \times \mathbb{P}(Y = b_j)$$

Remarques

1. On dit aussi que X et Y sont indépendantes.
2. On a donc, toujours avec les notations de la section précédente que X et Y sont indépendantes si et seulement si :
$$\forall (i, j) \in D \times D', \quad p_{i,j} = p_{i\bullet} \times p_{\bullet j}.$$
3. On a aussi, avec les notations de la remarque suivant la définition 9, $Z(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
4. On voit alors que tout événement construit[11] à l'aide de X et tout événement construit à l'aide de Y formeront un couple indépendant.

Propriété 7

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant une espérance alors XY admet aussi une espérance et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Remarques

1. Bien sûr, on peut avoir la formule sans avoir l'indépendance
2. Attention : quand X et Y ne sont pas indépendantes, il faut plus d'informations pour pouvoir calculer l'espérance de XY.

[11] Donc de la forme $\{X \in A\}$.

Définition 11 (indépendance mutuelle)

Soient X, Y, Z,... des variables aléatoires. Ces variables sont *mutuellement indépendantes* si et seulement si pour tous nombres a, b, c... on a :

$$\mathbb{P}(\{X=a\}\cap\{Y=b\}\cap\{Z=c\}\cap\cdots)=\mathbb{P}(X=a)\times\mathbb{P}(Y=b)\times\mathbb{P}(Z=c)\times\cdots$$

Remarques

1. Souvent on dit indépendant pour mutuellement indépendant.
2. La définition peut s'étendre en : X, Y, Z,... sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tous sous ensembles A, B, C, ... de $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$, $Z(\Omega)$, ... :
$$\mathbb{P}(\{X\in A\}\cap\{Y\in B\}\cap\{Z\in C\}\cap\cdots)=\mathbb{P}(X\in A)\times\mathbb{P}(Y\in B)\times\mathbb{P}(Z\in C)\times\cdots$$

3 Loi binomiale

Rappelons ce qu'est une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: elle compte le nombre de succès à n expériences de Bernoulli indépendantes ayant chacune la même probabilité p de succès.

Théorème 8

Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.
Alors $S=X_1+\cdots+X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Remarques

1. Il y a une réciproque : si $S\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$ alors S est la somme de n variables indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p. Ici X_k est la variable indicatrice de l'événement « la k^{e} expérience est un succès ».
2. On peut en déduire que si $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$, $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(m,p)$ et X, Y indépendantes alors $X+Y\hookrightarrow\mathcal{B}(n+m,p)$.

IV Espérance : approfondissements

À partir de maintenant que des nouveautés.

1 Transfert

Théorème 9 (transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète réelle telle que $X(\Omega)=\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, f une fonction et $Y=f(X)$.
La variable aléatoire Y a une espérance si et seulement si la série $\sum f(a_k)\mathbb{P}(\{X=a_k\})$

converge **absolument** et dans le cas de la convergence :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(a_k)\mathbb{P}(\{X = a_k\}).$$

Remarques

1. Ce théorème permet d'éviter de trouver la loi de Y.
2. La connaissance de la loi de Y permet alors d'établir une formule sommatoire...

2 Variance

Pour l'instant on avait qu'un caractère de position : l'espérance. Il nous manquait une mesure de la dispersion d'une variable aléatoire autour de sa moyenne. C'est le rôle de la variance. On le verra dans un cours ultérieur : plus elle est grande, plus il est probable que la variable aléatoire prenne des valeurs loin de son espérance.

Propriété 10

Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Si X^2 a une espérance alors X en a aussi une ainsi que $(X - \mathbb{E}(X))^2$. On dira que X a un moment (centré) d'ordre 2.

Remarque En général : si $0 < a < b$ et si X^b a une espérance alors X^a en a aussi une.

Définition 12 (variance, ecart-type)

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2.

(a) On appelle variance de X qu'on note $V(X)$, le réel $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))^2\Big)$

(b) On appelle écart-type de X, qu'on note $\sigma(X)$ le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Remarques

1. On dira souvent « X a une variance » au lieu de « X a un moment d'ordre 2 ».
2. Quand on demande les moments d'une variable aléatoire discrète réelle, on demande en fait on espérance et sa variance. A contrario, le moment d'ordre m de X, s'il existe est $\mathbb{E}(X^m)$.

Propriété 11 (formule de König-Huygens)

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2 alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

Remarques

1. On a clairement $\mathbb{V}(X) \geq 0$ et $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$.
2. Une exploration similaire à celle faite à l'exemple 2.2 donne : $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si X est presque certainement constante.

Propriété 12

Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2 alors $aX + b$ a aussi une variance et :

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

3 Covariance

Propriété 13

Soient X, Y deux variables réelles admettant une variance. Alors XY a une espérance.

Remarques

1. On voit tout de suite que dans ce cas là, $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$ a aussi une espérance.
2. On peut montrer en exercice[12] que $\Big(\mathbb{E}(XY)\Big)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

Définition 13 (covariance)

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles admettant une variance. On définit la covariance du couple (X, Y) par :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\Big)$$

Remarques

1. La linéarité de l'espérance permet facilement de montrer que la covariance est bilinéaire.
2. La commutativité du produit, que la covariance est symétrique.
3. On voit aussi que $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$: la covariance est une forme bilinéaire symétrique positive[13].

[12] Classique : il s'agit de la même démonstration que Cauchy-Schwartz !

[13] Cela ne rappelle pas quelqu'un ?

Propriété 14

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles admettant une variance. On a :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Corollaire 15

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes** et admettant une variance. On a :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

Remarque La réciproque est bien entendu fausse !

4 Variance d'une somme

Propriété 16

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles admettant une variance et a, b deux nombres. $aX + bY$ a une variance et :

$$\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$

Remarques

1. On a entre autres :
$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$
$$\mathbb{V}(X - Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$
2. Si on en somme beaucoup :
$$\mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2\mathbb{V}(X_k) + 2\sum_{1\le k<\ell\le n} a_k a_\ell\,\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)$$
3. On voit donc que la variance a des propriétés similaires à la norme et la covariance au produit scalaire. Ce qui manque c'est le caractère non dégénéré[14].
4. Et si il y a **indépendance** :
$$\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y)$$
$$\mathbb{V}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2\mathbb{V}(X_k)$$
notamment
$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$
$$\mathbb{V}(X - Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

[14] C-à-d. que $\mathbb{V}(X) = 0$ n'implique pas forcément $X = 0$. Voir l'exemple 2.2.

5 Corrélation

Propriété 17

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles admettant une variance. On a :

$$\Big(\mathrm{Cov}(X,Y)\Big)^2 \leq \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$$

Définition 14 (coefficient de corrélation)

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles admettant une variance non nulle. On définit le *coefficient de corrélation* du couple (X,Y) par :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Propriété 18

On a :

$$|\rho(X,Y)| \leq 1$$

Avec égalité si et seulement si il existe deux nombre a, b tels que $Y = aX + b$ presque certainement.