Séries entières

Niels Henrik Abel 1802–1829

Mathématicien norvégien. Sa vie est à l'image de l'époque : mouvementée et tragique. Il nait dans un pays subissant la famine suite aux guerres napoléoniennes. Sa vie d'adulte celle d'un long voyage ou il parcourt une Europe partiellement détruite par les conflits pour essayer de rencontrer les grands mathématiciens de son époque.
Il passera d'abord en Allemagne où il publiera en 1825-26 six articles dont celui qui nous intéresse, puis en France où inconnu il ne parvient pas à rencontrer les sommités de l'époque que sont Cauchy, Legendre ou Poisson. Son mémoire présenté à l'académie des sciences impressionne tellement Cauchy que celui-ci remet sa lecture détaillée à plus tard[1]
Il meurt en 1829 à 26 ans d'une tuberculose.
Son article[2]

$$\text{Recherche sur la série } 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}.x^2+\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}.x^3+\ldots\text{etc.}$$

est à la base des différents cours sur les séries. Son introduction est remarquablement moderne. La voici :

> Si l'on fait subir au raisonnement dont on se sert en général où il s'agit des séries infinies, un examen plus exact, on trouvera qu'il est en entier peu satisfaisant, et que par conséquent le nombre de théorèmes, concernant les séries infinies, qui peuvent être considérés comme rigoureusement fondés, est très limité. On applique à l'ordinaire les opérations de l'analyse aux séries infinies[3] de la même manière que si les séries étaient finies[4], ce qui me semble pas permis sans démonstration particulière. Si par exemple on doit multiplier deux séries infinies l'une par l'autre, on pose[5]
>
> $$(u_0+u_1+u_2+u_3+\text{etc.})(v_0+v_1+v_2+v_3+\text{etc.}) = u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+ (u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)+\text{etc}\ldots+(u_0v_n+u_1v_{n-1}+u_2v_{n-2}+\ldots+u_nv_0)+\text{etc.}$$
>
> Cette équation est très juste lorsque les séries $u_0+u_1+\ldots$ et $v_0+v_1+\ldots$ sont finies. Mais si elles sont infinies il est d'abord nécessaire qu'elles convergent, car une série divergente n'a pas de somme, et ensuite la série du second membre

[1] Tellement tard que sa désinvolture fut à l'origine du retour d'Abel en Norvège.

[2] Publié en 1826, en allemand, dans le premier numéro du *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (aussi appelé à l'époque Journal de Crelle, du nom de son rédacteur en chef). La traduction est postérieure à sa mort : elle a été faite pour la publication de ses oeuvres complètes en 1839. Me voir pour des références précises

[3] Aujourd'hui on dit série tout court.

[4] Là c'est une somme finie.

[5] Le produit de Cauchy et sa somme.

doit de même converger. C'est seulement avec cette restriction que l'expression ci-dessus est juste; mais, si je ne me trompe, jusqu'à présent on n'y pas encore eu égard. C'est ce que je me propose de faire dans ce traité.

Cet article continue en successivement :

- définissant la convergence d'une série;
- établissant la règle de d'Alembert;
- établissant ce qui va devenir le lemme d'Abel;
- démontrant la continuité de la somme d'une série entière dans son disque de convergence;
- établissant enfin le théorème portant sur la somme d'un produit de Cauchy de séries.

Le tout en 4 pages!

Table des matières

Les questions

1 Rayon de convergence

Qu'est-ce que le rayon de convergence ?

Voir la définition 2.

Qu'est-ce que le disque, l'intervalle de convergence ?

Il s'agit du disque ouvert $B(0, R)$ ou de l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

2 Étude de la somme d'une série entière

Où la somme est elle continue, $\mathcal{C}^\infty$?

La somme est continue sur son disque de convergence.
La somme est $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle de convergence.

Et aux bornes de l'intervalle de convergence ?

A priori non on ne peut pas dire grand chose. Il faut utiliser un des théorèmes d'interversion qui seront vus dans le cours sur les séries de fonctions.

3 Fonctions développables en série entière

Peut-on toujours développer en série entière ?

Non ! Voir l'exemple 6.

Quel est le lien entre intervalle de convergence et ensemble de définition ?

A priori aucun ! Tout ce qu'on peut dire c'est qu'il existe r tel que $0 < r < R$ et $]-r, r[\subset \mathcal{D}_f$. L'intervalle I de la définition 3 n'est *pas* l'ensemble de définition de f.

Les savoir-faire

- Savoir déterminer le rayon de convergence d'une série entière.
- Essayer de ne pas se limiter au critère de d'Alembert pour trouver un rayon de convergence.
- Pratiquer l'addition ou le produit de Cauchy de séries entières.
- Connaître les propriétés de la somme d'une série entière de la variable réelle.
- Savoir calculer la somme d'une série entière.
- Connaître le développements en série entière usuels.

I Série entière : rayon de convergence

Avant de parler de convergence, il faut définir ce qu'est une série entière. Quelle que soit la vision qu'on a, il s'agira d'une série dont le terme général dépend d'une variable (ici z) et dont la somme est donc une fonction de cette variable.

1 Définition

Définition 1

On appelle *série entière* toute série de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{C}$ et z est la *variable*.

Vocabulaire

- Les a_n ($n \in \mathbb{N}$) sont les *coefficients* de la série entière. Ils ne dépendent pas[6] de la *variable* z. Définir une série entière revient donc à donner une suite de complexes (a_n).

- Si z est réputé être un complexe, on dira que la série entière est de *la variable complexe*. Si, au contraire, on impose $z \in \mathbb{R}$, on parlera alors de *série entière de la variable réelle*.

- Une série entière est en fait une série de fonctions (les fonctions monomiales $z \longmapsto a_n z^n$). En tout état de cause, on considère souvent la *somme* d'une série entière comme une fonction de sa variable. C'est-à-dire qu'on manipulera la fonction
$$S : z \in \mathbb{C} \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$
Cette fonction S est donc la fonction somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

- Une série entière indexée à partir du terme N, $\sum_{n\geq N} a_n z^n$ peut se ramener au cas de la définition en posant $a_n = 0$ pour $n < N$.
  - Ainsi, en écrivant $\sum_{n\geq 1} x^n/n$, on pose $a_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $a_n = 1/n$.
  - De même la série $\sum x^{n^2}$ est la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = 0$ si n n'est pas le carré d'un entier et $a_{p^2} = 1$. Ici la variable est x...

- La somme de la série entière $\sum a_n z^n$ pourra s'écrire $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Ainsi $f(0) = a_0$ est toujours défini.

[6] Donc leur écriture ne contient pas la lettre z

2 Le rayon de convergence

Propriété 1 (lemme d'Abel)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si pour un réel $\rho > 0$, la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée, alors la série $\sum a_n z^n$ est convergente pour tout complexe z élément du disque ouvert $B(0, \rho)$, c'est-à-dire pour lequel $|z| < \rho$.

On s'intéresse ainsi à l'ensemble[7] des ρ tels que $(a_n \rho^n)$ est bornée.

Définition 2

Soient $\sum a_n z^n$ et $\mathrm{E}_a = \{\rho \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}$. On appelle *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure de E_a dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Théorème 2

soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

(1) Si $R < +\infty$ (c'est-à-dire $R \in \mathbb{R}$) et si $|z| > R$ alors la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée et $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

(2) Si $R > 0$ et si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Exemples 1

1. La série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. On a donc $R = +\infty$.
2. $\sum z^n$: $R = 1$. Divergence sur le cercle de convergence (sic, d'où l'expression cercle d'incertitude)
3. $\sum z^n/n^2$: $R = 1$. Convergence sur le cercle de convergence.
4. $\sum z^n/n$: $R = 1$. Convergence sur le cercle de convergence sauf en $z = 1$.

3 Détermination du rayon de convergence

Tout se base sur le théorème 2. En fait, il pourrait presque servir de définition pour le rayon de convergence. La propriété suivante est une reformulation des deux points du théorème.

[7] Il dépend bien sûr de la suite des coefficients.

Propriété 3

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$.

(1) Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors $|z_0| \leq R$.

(2) Si la série $\sum a_n z_0^n$ diverge alors $R \leq |z_0|$.

Propriété 4 (comparaison de rayons de convergence)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R_a et R_b.

(1) Si $a_n \underset{+\infty}{=} O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.

(2) Si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Propriété 5

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exemples 2

1. Rayon de convergence de $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$.
2. Rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n!}{1 \cdots 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} z^{2n+1}$.
3. Rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ où a_n est la n^{e} décimale de $\sqrt{2}$. Que vaut la somme pour $z = 1/10$?
4. Rayon de convergence de $\sum f(n) z^n$ où f est une fraction rationnelle non nulle.
5. Rayon de convergence de $\sum n^\alpha a_n z^n$ à partir de celui de $\sum a_n z^n$.

4 Opérations sur les séries entières

Propriété 6

Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergeant absolument toutes deux dans $B(0,r)$ et de sommes respectives f et g.

(1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la série entière $\sum \lambda a_n z^n$ converge dans $B(0,r)$ et a pour somme λf.

(2) La série entière $\sum (a_n + b_n)z^n$ converge absolument dans $B(0, r)$ et a pour somme $f + g$.

(3) La série entière $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$ converge absolument dans $B(0, r)$ et a pour somme fg.

Vocabulaire La série entière $\sum c_n z^n$ est le *produit de Cauchy* des deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Exemple 3 Le produit de cauchy de $\sum x^n$ par elle même est $\sum (n + 1)x^n$...

Corollaire 7

Soient R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

(1) Le rayon R_s de la série entière $\sum (a_n + b_n)z^n$ vérifie :

$$R_s \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus, si $R_a \neq R_b$, $R_s = \min(R_a, R_b)$.

(2) Le rayon de convergence R_p du produit de Cauchy des deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifie :

$$R_p \geq \min(R_a, R_b).$$

Corollaire 8

L'ensemble des suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière converge dans le disque ouvert $B(0, r)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

II Continuité et dérivabilité

Le principe est simple : à l'intérieur du disque ouvert ou de l'intervalle ouvert de convergence tout est facile...

1 Résultat préliminaire

Propriété 9

Les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Remarques

1. On peut le prolonger en : les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ et $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.
2. Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, les séries $\sum n^p a_n z^n$ et $\sum \dfrac{a_n}{n^p} z^n$ on le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.
3. Puis en utilisant la propriété 4, si f est une fraction rationelle non nulle alors les séries entières $\sum f(n) a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ on même rayon de convergence.

Théorème 10 (Développement limité à l'ordre 1)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Notons g la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$.
Soit $z_0 \in B(0, R)$. Il existe un réel $\rho > 0$ et une fonction ε tels que :

(1) $B(z_0, \rho) \subset B(0, R)$ (c'est-à-dire $|z_0| + \rho < R$) ;

(2) ε est définie sur $B(0, \rho)$ et a pour limite 0 en 0 ;

(3) pour tout $h \in B(0, \rho)$ (c'est-à-dire tel que $|h| < \rho$),

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hg(z_0) + h\varepsilon(h).$$

2 Variable complexe : continuité

Corollaire 11

Avec les hypothèses du théorème 10.
La fonction f est une fonction continue sur le disque ouvert $B(0, R)$.

Propriété 12

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe, de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et de somme f. Si la série $\sum |a_n| R^n$ converge alors, f est continue sur le disque fermé $B'(0, R)$.

3 Variable réelle : continuité

Le plus simple.

Propriété 13

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.
Alors la fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

Propriété 14

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières convergeant toutes deux sur l'intervalle ouvert $]-r, r[$, de sommes respectives f et g.
Si pour tout $x \in]-r, r[$, $f(x) = g(x)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Corollaire 15

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, convergeant sur un intervalle $]-r, r[$ (avec $r > 0$) et de somme f.
Alors f est paire (respectivement impaire) si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ (respectivement $a_{2n} = 0$).

4 Variable réelle : dérivation et intégration

Théorème 16

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f.
Alors f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et :

$$\forall x \in]-R, R[, \; f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Corollaire 17

Avec les mêmes notations, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-R, R[$:

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n x^{n-p}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\cdots(n+1)a_{n+p}x^n$$

En particulier $f^{(p)}(0) = p!a_p$.

Exemple 4 En dérivant p fois la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-1, 1[$, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n.$$

Corollaire 18

Avec les mêmes notations.

(1) Pour tout segment $[a, b]$ inclus dans $]-R, R[$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n\,\mathrm{d}x.$$

(2) En particulier, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Exemple 5 (suite de l'exemple 4) Nous savons que pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t}.$$

Donc, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

III Fonctions développables en série entière

La question est historiquement sensible. En effet on a longtemps cru que toutes les fonctions indéfiniment dérivables étaient des sommes de séries entières. Ce n'est que pendant la seconde moitié du XIXᵉ siècle que des contre-exemples ont été produits pour infirmer cette idée. L'exemple 6 est typique de fonctions qui sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qui ne sont pas la somme d'une série entière.

1 Notion de développement en série entière

Définition 3

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et f une fonction de la variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et définie sur I. On dit que f est *développable en série entière* sur I s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Propriété 19

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. L'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{C}$ qui sont développables en série entière sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$. Il est aussi stable par la multiplication.

On voit tout de suite que le corollaire 17 permet immédiatement de déduire que si f est développable en série entière alors la série entière du développement est la « série de Taylor » de f, c'est-à-dire $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Propriété 20

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et f une fonction de la variable réelle, à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie sur I et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour que f soit développable en série entière sur I il faut et il suffit que :

$$\forall x \in I,\ \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

et dans ce cas le développement en série entière de f coïncide avec sa série de Taylor : $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
Le rayon de convergence R vérifie $I \subset]-R, R[$.

Propriété 21

Avec les notations précédentes;, si $I =]-a, +a[$ et si :

$$\forall r < a,\ \exists M_r \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in [-r, r]\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M_r.$$

Alors f est développable en série entière.

ATTENTION Il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ qui ne sont pas développables en série entière

EXEMPLE 6 On considère f définie pour tout $x \neq 0$ par $f(x) = \exp(-1/x^2)$ et $f(0) = 0$.

2 Florilège de fonctions développables en série entière

a Sur $\mathbb{C}$

On a deux sommes de séries entières de la variable complexe : la série exponentielle et la série géométrique et ses dérivées.

Propriété 22 (Série exponentielle)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Propriété 23 (Serie géométriqe et ses « dérivées »)

Pour tout complexe z tel que $|z| < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \\ \frac{1}{(1-z)^{p+1}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n \\ &= \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} \end{aligned}$$

Le rayon de convergence est $R = 1$.

b Fonctions hyperboliques

Propriété 24

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Le rayon de convergence est $R = +\infty$.

c Fonctions circulaires

On continue en utilisant les formules d'Euler, pour obtenir sin et cos

Propriété 25

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Le rayon de convergence est $R = +\infty$.

d Séries déduites de la série géométrique

De la série géométrique $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ $(R = 1)$ on déduit :

Propriété 26

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Le rayon de convergence est $R = 1$.

Propriété 27

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Le rayon de convergence est $R = 1$.

e Série du binôme

Propriété 28

Pour tout réel α et tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.\end{aligned}$$

le rayon de convergence étant $R = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$.

Corollaire 29

Pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n + \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^n +\end{aligned}$$

Le rayon de convergence est $R = 1$.

Corollaire 30

Pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$\operatorname{argsh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Le rayon de convergence est $R = 1$.

3 Méthodes pour développer en série entière une fonction donnée

a Fractions rationnelles

Le tout par l'exemple.

Exemple 7 Développer en série entière $x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ où a et b sont deux complexes non nuls.

b Méthode par dérivation ou intégration

Après dérivation/intégration, il peut arriver qu'une fonction soit sous une forme qui permette de trouver facilement un développement en série entière.

Exemple 8 Développer en série entière $x \longmapsto f(x) = \arctan(x + \sqrt{3})$ en passant par f'.

c Utilisation du produit de Cauchy

Exemple 9 Développer en série entière $x \longmapsto (\arctan x)^2$.

d Utilisation d'une équation différentielle

Il s'agit d'une méthode classique. On a déjà vu son utilisation dans la démonstration de la propriété 28.

Exemple 10 Développer en série entière $f : x \longmapsto (\arcsin x)^2$. On montre d'abord que f est solution sur $]-1,1[$ de $(1-x^2)y'' - xy' = 2$.

4 Sommation de séries

a Trouver la somme d'une série entière donnée

Par l'exemple.

Exemples 11

1. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n$.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3n+2}$.
3. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

b Sommer une série numérique

Pour sommer $\sum a_n$, on peut utiliser une série entière $\sum a_n x^n$ (ou, si besoin est $\sum a_n x^{2n}$, *etc.*) de rayon de convergence R et dont on exprime la somme f. Deux cas se présentent alors.

- Si le rayon de convergence R est tel que $R > 1$, il n'y a pas de problème et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = f(1)$.
- Si, par contre $R = 1$, on ne peut conclure avec les théorèmes du cours... Il va falloir procéder à une étude plus poussée en utilisant par exemple des théorèmes du cours sur les suites et séries de fonctions.