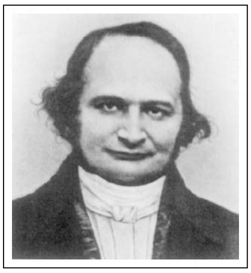
Séries : compléments

Carl Gustav Jakob Jacobi 1804–1851



Mathématicien prussien[1], il est surtout connu pour ses travaux sur les intégrales elliptiques, les équations aux dérivées partielles et leur application à la mécanique analytique.
Jacobi a écrit le traité classique sur les fonctions elliptiques, d'une importance capitale en physique mathématique pour l'intégration des équations du second ordre tirées de la conservation de l'énergie cinétique.
Ces fonctions sont obtenues à partir de l'étude de l'intégrale :

$$F(A,k)=\int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \text{ pour } 0\leq k<1$$

et se retrouvent dans l'étude des équations du mouvement d'un pendule pesant, d'une toupie symétrique ou d'un corps tournant librement autour d'un axe.
La fonction $A \longmapsto F(A,k)$ est une bijection[2] de $\mathbb{R}$ dans lui-même et sa réciproque, notée $u \longmapsto A(u,k)$ est à la base des fonctions elliptiques de Jacobi. La plus simple d'entre elles étant $\mathrm{sn}(u,k)=\sin A(u,k)$.
Jacobi a aussi étudié des fonctions définies par des séries :

- Les fonctions hypergéométriques, de la forme

  $${}_pF_q(x)(a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

  où

  $$c_0=1, \text{ et } \frac{c_{k+1}}{c_k}=\frac{(k+a_1)(k+a_2)\cdots(k+a_p)}{(k+b_1)(k+b_2)\cdots(k+b_q)}\cdot\frac{1}{k+1}$$

  Ces fonctions recouvrent énormément de fonctions usuelles. Par exemple[3] :

  $$e^x={}_0F_0(;;x),\ (1-x)^{-a}={}_1F_0(a;;x)$$

- La fonction thêta[4] définie par :

  $$\theta(z;\tau)=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(2in\pi z)e^{in^2\pi\tau}$$

Table des matières

[1] Les sources ne changent pas : wikipedia et MacTutor...
[2] Vous pouvez le démontrer : l'intégrale « $F(+\infty,k)$ » diverge...
[3] On le démontrera dans un cours ultérieur.
[4] Appelée fonction θ de... Jacobi.

Les questions

1 J'ai besoin de réviser quoi ?

Ce cours repose sur les cours suivants :

- suites de première année. ;
- séries de première année ;
- intégrales impropres.

2 À quel ordre faire le développement limité ?

On cherchera à écrire le terme général u_n sous la forme

$$u_n = \underbrace{v_n + \cdots}_{\text{somme de termes généraux de séries dont on connaît la nature.}} + \underbrace{w_n + o(w_n)}_{\text{équivalent au terme général d'une série convergente ou divergente à termes de signe constant.}}$$

Par exemple :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{v_n} \underbrace{- \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{w_n}$$

Or $\sum v_n$ converge (théorème spécial des séries alternées) et w_n est équivalent au terme général (positif) d'une série divergente, donc $\sum u_n$ diverge.

3 Quelles sont les pièges à éviter ?

a Que dire de $\sum u_n$ si $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge ?

A priori **rien**, sauf si l'une des deux séries est à termes **positifs** à partir d'un certain rang.
On a une réponse similaire dans le cas $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge.

b Que dire de $\sum u_n$ si $u_n = o(\frac{1}{n})$?

Toujours **rien** ! Par exemple $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge et les termes généraux sont tous deux des $o(\frac{1}{n})$.

c Que dire de $\sum u_n$ si $\left|\sum_{p=0}^{n} u_p\right| \leq 1$?

Encore **rien**. Sauf si u_n est de **signe constant**, auquel cas $\sum u_n$ converge.

d Peut-on écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} (u_{2p} + u_{2p+1})$?

A priori **non**. Sauf si on a d'abord montré la convergence des séries $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{2p}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{2p+1}$.

Les savoir-faire

- Le cours de première année !.
- Connaître dans sa totalité le critère spécial des séries alternées (convergence et reste).
- Mémoriser la formule de Stirling.
- Savoir utiliser le théorème de comparaison série-intégrale.
- Savoir reconnaître un produit de Cauchy de séries connues.

I Règle de d'Alembert

Propriété 1 (règle de d'Alembert)

Soit $\sum_{n \geq N} u_n$ une série à termes réels **strictement positifs**.

(1) S'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ avec $a < 1$ tel qu'à partir d'un certain rang n_0 on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a$ alors la série $\sum u_n$ converge.

(2) Si, à partir d'un certain rang n_0, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Corollaire 2 (règle de d'Alembert pratique)

Soit $\sum\limits_{n \geq N} u_n$ une série à termes réels **strictement positifs**. On **suppose** qu'il existe de $\ell = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \in \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

(1) Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.

(2) Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exemples 1

Nature de $\sum u_n$ où :

1. $u_n = \dfrac{n!}{(2n)!} x^n$ avec $x > 0$. Extension au cas $x \in \mathbb{C}$ quelconque (convergence absolue).
2. $u_n = n^\alpha x^n$ avec $x > 0$. Extension au cas $x \in \mathbb{C}$ quelconque.

II Séries à termes positifs et intégrales impropres

1 Comparaison Série-intégrale

Théorème 3

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue par morceaux, *positive* et *décroissante*.

(1) La série $\sum\limits_{n \geq n_0} \left(f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right)$ converge.

(2) La série $\sum\limits_{n \geq n_0} f(n)$ est de même nature que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemples 2

1. Séries de Riemann : $f(t) = 1/t^\alpha$.
2. Séries de Bertrand : $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$.

2 Applications

Lorsque f vérifie les hypothèses du théorème 3, on peut utiliser le premier point de ce théorème pour étudier les sommes partielles de $\sum f(n)$ si cette série diverge. Par contre, si la série converge il est plus judicieux de reprendre la méthode développée lors de la démonstration, à savoir un encadrement de $f(n)$ par deux intégrales, pour conclure quand à un encadrement puis un équivalent du reste de la série.

EXEMPLE 3 Un exemple simple est le cas des séries de Riemann. Ici $f(t) = 1/t^\alpha$

1. Encadrement et équivalent du reste R_n lorsque $\alpha > 1$
2. Équivalent de $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$ lorsque $\alpha \in]0, 1[$.

Propriété 4 (Formule de Stirling)

On a l'équivalent de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

III Produit de Cauchy de séries

Définition 1

Soients $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes complexes. On appelle *produit de Cauchy* de ces deux séries la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ où $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$.

Théorème 5

Si les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ *convergent absolument* alors la série produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} w_n$ de ces deux séries *converge absolument* et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

IV Séries alternées

Définition 2

On appelle *série alternée* une série de la forme $\sum (-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite de termes réels de signe fixe.

Théorème 6 (critère spécial des séries alternées)

Soit $\sum u_n$ une *série alternée* telle que la suite $(|u_n|)$ soit *décroissante* et de *limite nulle*. Alors :

(1) La série $\sum u_n$ converge.

(2) Le reste d'ordre n, c'est-à-dire $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$ est du signe de u_{n+1} (le premier terme de R_n) 1et vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Remarque Certains auteurs appellent ce critère « critère de Leibniz ».

Exemple 4 Pour $\alpha \in]0,1]$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Méthode Pour étudier une série à termes réels (ou complexes) non absolument convergente on fera (si c'est possible) un développement asymptotique du terme général, le dernier terme étant :

- ou bien le terme général d'une série absolument convergente ;
- ou bien de signe fixe.

Exemples 5

1. Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{2/3} + \cos n}$.
2. Nature, en fonction de $\alpha > 0$, de $\sum u_n$ avec $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.