Réduction

Marie Ennemond Camille Jordan[1] 1838–1922

Mathématicien français[2], connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent cours d'analyse. Aujourd'hui on associe son nom à un certain nombre de résultats fondamentaux :

- le théorème de Jordan et la courbe de Jordan à laquelle ce théorème se réfère ;
- la forme normale de Jordan et la réduction de Jordan (parfois confondue avec les travaux de Wilhelm Jordan 1842–1899 à qui l'on doit la méthode du pivot ou d'élimination de Gauss-Jordan) ;
- le théorème de Jordan-Hölder, qui est un résultat fondamental sur les groupes finis et les séries de compositions.

Camille Jordan a contribué à faire entrer la théorie de Galois dans le courant de pensée majoritaire. Il étudia aussi les groupes de Mathieu, premiers exemples de groupes sporadiques.

Table des matières

[1]C'est le nom complet. Son prénom d'usage est Camille.
[2]Merci qui ? Ben pas mamie Nova, mais MacTutor et Wikipedia...

Les questions

1 J'ai besoin de réviser quoi ?

Ce cours repose sur les cours suivants :

- algèbre linéaire générale (sup et spé) ;
- déterminants ;
- polynômes.

2 Ça sert à quoi ?

Les notions introduites (vecteurs et valeurs propres, sous-espaces stables) sont utilisées dans de nombreux domaines des mathématiques, de la physique et de la chimie : systèmes différentiels, mécanique classique et quantique, théorie du signal, etc.
En mécanique, par exemple, dès qu'il y a vibration, il y a *modes propres*. Pour les trouver, on cherche les éléments propres d'un système différentiel associé au problème.

3 Diagonalisation

Qu'est-ce qu'une valeur propre ? Comment trouver ces valeurs ?

Voir les définitions 3 (p. 5) et 4 (p. 6). Pour trouver les valeurs propres on peut :

1. résoudre $AX = \lambda X$;
2. trouver les racines du polynôme caractéristique de A ;
3. utiliser la forme de la matrice (triangulaire par exemple), sa trace, son déterminant et même son rang pour trouver les valeurs propres ;
4. chercher un polynôme annulateur et le factoriser (attention c'est limite HP) ;
5. voir que $A = P(B)$; Les valeurs propres de A sont alors de la forme $P(\mu)$; voir la propriété 7 page 8 (même remarque que supra) ;
6. utiliser un polynôme annulateur : ses racines donnent des candidats pour les valeurs propres de A ; voir la propriété 8 page 8.

Que dire des éléments propres de A et de $\alpha I_n + A$?

Ils sont *fortement* liés[3]. Pour être précis, on a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \alpha + \lambda \in \mathrm{Sp}(\alpha I_n + A)$$

et

$$\mathrm{E}_\lambda(A) = \mathrm{E}_{\alpha+\lambda}(\alpha I_n + A).$$

[3] Donc si on sait faire pour A, on *doit* savoir faire pour $\alpha I + A$!

Que dire d'une matrice qui n'a qu'une seule valeur propre ?

En général elle n'est pas diagonalisable. Voir la propriété 24 page 8.

Quand est-ce-que u est il diagonalisable ?

Voir la définition 9 (p. 12). Les théorèmes 26, 29 et 30 (pp. 13, 13 et 14) fournissent des conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité.
On peut aussi utiliser la condition suffisante fournie par le corollaire 28.

Les savoir-faire

- Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- Diagnostiquer la diagonalisabilité ou la trigonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- Savoir réduire une matrice carrée.
- Appliquer les stratégies de réduction au calcul des puissances n^{es} d'une matrice carrée.
- Savoir exploiter les relation entre un endomorphisme et ses matrices dans différentes bases.
- Savoir, dans les cas simples, trigonaliser une matrice.
- Avoir des idées pour la recherche d'éléments propres en dimension infinie.

I Révisions sur les déterminants

Quelques calculs...

Exemple 1 On cherche à calculer les déterminants suivants :

1. $\det(u_1 + xv, u_2 + xv, \dots, u_n + xv)$ où v, u_1, ..., u_n sont $n+1$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
2. $\det(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1+a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

   On peut le traiter à l'aide d'une méthode similaire au 1. ou observer la somme des termes de chaque ligne.

3. $\det(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

4. Déterminant de *Vandermonde* : $V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

II Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

1 Généralités

Définition 1

Soit P le polynôme défini par $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Pour $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k = a_0 \operatorname{Id}_{\mathrm{E}} + a_1 u + \cdots + a_d u^d.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit de même $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d.$$

Exemple 2 Si $A = SDS^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (c'est-à-dire A diagonalisable). On a $P(A) = SP(D)S^{-1}$ et $P(D) = \operatorname{diag}(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$.

Propriété 1

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tous P, Q de $\mathbb{K}[X]$,

$$(\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u),$$
$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

Remarques
1. On voit donc que $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.
2. Un cas particulier est le cas où $Q = X$: $u \circ P(u) = P(u) \circ u$.

Propriété 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tous P, Q de $\mathbb{K}[X]$,

$$(\lambda P + Q)(A) = \lambda P(A) + Q(A),$$
$$(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A).$$

Propriété 3

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Im} P(u)$ et $\operatorname{Ker} P(u)$ sont des sous-espaces stables par u.

2 Polynôme annulateur

Définition 2

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un *polynôme annulateur* de u si et seulement si $P(u) = 0$. On dira aussi que u annule P.
On définit de la même façon un polynôme annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque Supposons que $\dim(\mathrm{E}) = n$. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est de dimension $N = n^2$. La famille $\left(u^k\right)_{k \in [\![0,N]\!]}$ est de cardinal $N+1$ et est donc liée. Il existe donc un polynôme annulateur de u. Son degré est au plus $N = n^2$...

Exemples 3
1. Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et tel que $d \in \mathbb{N}^*$, $u^d = 0$ et $u^{d-1} \neq 0$ alors : X^d est annulateur de u.
2. On suppose que $u^2 - 3u + 2\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = 0$. Calcul de u^m pour $m \in \mathbb{N}$.

III Éléments propres

1 Définitions

Définition 3 (élément propres)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de u si et seulement si il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$.

2. On dit que $x \in \mathrm{E}$ est *vecteur propre* de u *associé à la valeur propre* $\lambda \in \mathbb{K}$ si et seulement si il est **non nul** et vérifie $u(x) = \lambda x$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u, le *sous-espace propre* de u *associé à la valeur propre* λ est $\mathrm{Sep}(u;\lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id_E}) = \{x \in \mathrm{E} \mid u(x) = \lambda x\}$.

Remarque Certains auteurs écrivent aussi $\mathrm{E}_\lambda(u)$ pour le sous-espace propre associé à la valeur λ pour u ; il n'y a pas de notation standard[4] pour décrire un sous-espace propre.

Définition 4

Les éléments propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont ceux de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. Ainsi :

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de A si et seulement si il existe un vecteur **non nul** $x \in \mathbb{K}^n$, de colonne associée $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, telle que $AX = \lambda X$.
2. On dit que $x \in \mathbb{K}^n$, de colonne associée $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est *vecteur propre* de A *associé à la valeur propre* $\lambda \in \mathbb{K}$ si et seulement si il est **non nul** et vérifie $AX = \lambda X$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A, le *sous-espace propre* de A *associé à la valeur propre* λ est l'ensemble des $x \in \mathbb{K}^n$ tels que $AX = \lambda X$, où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la colonne associée à x.

Une colonne **non nulle** $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ verifiant $AX = \lambda X$ est appelée *colonne propre* de A *associée à la valeur propre* $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque Souvent, dans l'en-tête d'un sujet on rencontrera la phrase : « on identifiera $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ». Ceci permet alors d'écrire Ax pour $x \in \mathbb{K}^n$ et d'éviter ainsi la lourdeur de « x de colonne associée X »...

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le *spectre* de $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, note $\mathrm{Sp}(u)$, est l'ensemble des valeurs propres de u.
De même, on définit le *spectre* d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 4

1. Éléments propres de $\lambda\,\mathrm{Id_E}$.
2. Éléments propres de la rotation u du plan (réel) d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.
3. $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, éléments propres de D défini par $D(f) = f'$.

[4] Mis à part l'écriture $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id_E})$.

4. $\mathrm{E} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: espace vectoriel des suites à termes complexes. Éléments propres de Δ défini par $\Delta(u) = v$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$.
5. $\mathrm{E} = \mathbb{C}[X]$, éléments propres de u défini par : $u(P) = XP$.
6. $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un projecteur tel que $p \neq 0$ et $p \neq \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. Éléments propres de p ?
7. $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ et s est la symétrie par rapport à F de direction G. Éléments propres de s ?

Propriété 4

Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent (pour la loi $\circ$) alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Remarque C'est notamment le cas où v est de la forme $v = P(u)$ où $P \in \mathbb{K}[X]$.

Propriété 5

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors :

(1) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u alors les sous-espaces propres $\mathrm{E}_{\lambda_1}(u), \ldots, \mathrm{E}_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.

(2) Toute famille de p vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Exemples 5

1. Même notations (et résultats) que l'exemple 4.3. Si on note $e_\lambda : t \longmapsto e^{\lambda t}$ alors, si les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, la famille de fonctions $(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_n})$ est une famille libre. dit autrement, la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.
2. Même notations (et résultats) que l'exemple 4.4. Par la même méthode que supra, la famille $\left((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
3. $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ défini par $u(f) = g$ si et seulement si $g(t) = tf'(t)$. Par la même méthode qu'avant, on déduit que la famille $(t \longmapsto t^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre dans E.

Écriture Si $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, on écrira $\overline{v} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$.

Propriété 6

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (vue comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $(v_1, \ldots, v_k)$ une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.
Alors $\overline{\lambda}$ est valeur propre de A et $(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k)$ une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\overline{\lambda}$.

Notamment les sous-espaces propres associés à λ et $\overline{\lambda}$ sont de même dimension.

Remarque Se souvenir des règles de calcul matriciel avec le conjugué :

$$\overline{AB} = \overline{A} \times \overline{B}$$
$$\overline{\det(M)} = \det(\overline{M}).$$

2 Polynôme annulateur et éléments propres

Propriété 7 (a priori HP : à savoir redémontrer rapidement)

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

(1) Pour toute valeur propre λ de u, $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

(2) Tout vecteur propre de u pour la valeur propre λ est vecteur propre de $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

On a des résultats analogues pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 8 (a priori HP : à savoir redémontrer rapidement)

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u. Alors toute valeur propre de u est racine de P.
On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3 Polynôme caractéristique

Dans cette section les espaces vectoriels sont supposés de **dimension finie non nulle**.

Propriété 9

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} (i) &\quad \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \\ (ii) &\quad \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u \notin \mathcal{GL}(\mathrm{E}), \\ (iii) &\quad \det(\lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u) = 0. \end{aligned}$$

a Polynôme caractéristique d'une matrice

Avant de commencer, un lemme utile. Sa démonstration est à savoir refaire.

Lemme 10

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $x \longmapsto \det(xA - B)$ est polynomiale de degré au plus égal à n.

Propriété 11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $x \in \mathbb{K} \longmapsto \det(xI_n - A)$ est une fonction polynomiale de degré exactement n et on a, pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$\det(xI_n - A) = x^n + -\operatorname{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

Comme à toute fonction polynomiale sur $\mathbb{K}$ on peut associer un unique polynôme, on peut définir :

Définition 6

Le *polynôme caractéristique* χ_A de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'élément de $\mathbb{K}[X]$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \chi_A(x) = \det(xI_n - A).$$

Remarque Certains auteurs et concepteurs de sujets peuvent définir[5] le polynôme caractéristique par :

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_n) = (-1)^n \det(xI_n - A).$$

Il faut donc, faire bien attention à la définition[6] utilisée par l'énoncé.

Exemple 6 Recherche de χ_A où $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Propriété 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire de termes diagonaux $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \chi_A(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k).$$

Remarque Attention : ne marche que si la matrice est triangulaire. En général, il n'y a *pas* de lien entre éléments diagonaux et valeurs propres.

[5] C'est l'ancienne définition. N'oubliez pas : le sujet a toujours raison !

[6] À la louche : si rien n'est dit, c'est celle de la définition 6, sinon faire *très* attention !

Propriété 13

Les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les racines de son polynôme caractéristique.

Propriété 14

(1) Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et donc même spectre.

(2) Une matrice carrée et sa transposée ont même polynôme caractéristique et donc même spectre.

b Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

En utilisant la première partie de la propriété 14, on peut justifier la définition suivante :

Définition 7

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est égal à celui de sa matrice dans toute base.

Propriété 15

Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ sont les racines de son polynôme caractéristique.

Propriété 16

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ avec $\dim \mathrm{E} = n$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$ on a :

$$\chi_u(x) = x^n - \mathrm{tr}(u)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u).$$

c Propriétés communes

Théorème 17 (Cayley-Hamilton)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Le polynome caractéristique de u, χ_u est un polynôme annulateur de u.
On a la même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque Ce théorème est surtout utile pour fournir un polynôme annulateur de degré raisonnable.

Propriété 18

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est scindé. On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 8

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On appelle *ordre de multiplicité* (ou ordre) de la valeur propre λ de u l'ordre de λ comme racine de χ_u. On a la même définition pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On revient sur une propriété qu'on avait déjà entrevu dans le passé :

Propriété 19

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, avec $\dim(\mathrm{E}) = n$, a au plus n valeurs propres distinctes. On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 20

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ de polynôme caractéristique χ_u **scindé** sur $\mathbb{K}$.
Si $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)$ alors :

$$\mathrm{tr}(u) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \quad \det(u) = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

On a les mêmes relations pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si χ_A est **scindé**.

Remarque Toujours dans le cas où χ_u est scindé. Si $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et $m_1, \dots, m_p$ les ordres respectifs de ces valeurs propres, on a :

$$\mathrm{tr}(u) = \sum_{k=1}^{p} m_k \lambda_k, \quad \det(u) = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{m_k}.$$

Ce qui change ici c'est qu'on suppose les valeurs propres distinctes et on compte leur multiplicité.

Propriété 21

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors $\overline{\lambda}$ est valeur propre de A avec le même ordre que λ.

Propriété 22

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et F un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{0\}$ et stable par u. Si on note u_1 l'endomorphisme de F induit par u alors χ_{u_1} divise χ_u.

Corollaire 23

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. La dimension d'un sous-espace propre de u est au plus égale à l'ordre de la valeur propre correspondante.
On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Remarque Donc si λ est une valeur propre de multiplicité $m \geq 1$, alors on a l'encadrement $1 \leq \dim \mathrm{Sep}(u, \lambda) \leq m$. Le cas $m = 1$ est donc particulièrement simple.

Corollaire 24

La dimension du sous-espace propre pour une valeur propre simple est égal à 1.

IV Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans ce paragraphe les espaces vectoriels sont supposés de **dimension finie non nulle**.

1 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Définition 9

1. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est dit *diagonalisable* si et seulement si E est la somme directe des sous-espaces propres de u.
2. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *diagonalisable* si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est diagonalisable.

Exemples 7
1. Projecteurs et symétries de E.
2. $D_n : P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto D_n(P) = P'$.
3. $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto f(A) = A + \mathrm{tr}(A) I_n$.
4. (Variante du précédent) $f : x \in \mathrm{E} \longmapsto f(x) = x + \varphi(x)\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ où φ est une forme linéaire non nulle sur E.

Propriété 25

Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ admet une unique valeur propre λ alors u est diagonalisable si et seulement si $u = \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Théorème 26

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) L'endomorphisme u est diagonalisable.

(ii) il existe des sous-espaces vectoriels $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_m$ stables par u, sur lesquels u induit des homothéties et tels que $\mathrm{E} = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{F}_k$.

(iii) Il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour u, c'est-à-dire une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

(iv) On a $\sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{E}_{\lambda_k}(u) = \dim \mathrm{E}$ où $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.

Corollaire 27

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Corollaire 28

Soient E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ possédant n valeurs propres distinctes, c'est-à-dire ayant un polynôme caractéristique scindé à racines simples.
Alors chaque sous-espace propre est de dimension 1 et u est diagonalisable.
On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 29

On suppose E de **dimension finie**. Pour que $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

(1) Son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

(2) Pour tout valeur propre de u, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de cette valeur propre.

On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 8

1. Suite de l'exemple 6.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. CNS sur a, b et c pour que A soit diagonalisable ?

Théorème 30

On suppose E de **dimension finie**. Pour que $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme **non nul scindé à racines simples**.
On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque Si u est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ alors un polynôme annulateur de u est $\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$.

Exemples 9

1. Projecteurs et symétries de E.
2. Retour sur l'exemple 8.2. On a les valeurs propres : -1 et 1 donc A est diagonalisable si et seulement si $(X-1)(X+1)$ est annulateur de A.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On définit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathrm{E}))$ par $f(v) = u \circ v$. On remarque que $P(f)(v) = P(u) \circ v$. On en déduit que f est diagonalisable si et seulement si u l'est.

2 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Définition 10

1. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est dit *trigonalisable* si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
2. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *trigonalisable* si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est trigonalisable, c'est-à-dire si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 31

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
On a la même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 10

1. Étude du cas de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$.
2. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ avec λ (resp. μ) valeur propre simple (resp. double) de A. On suppose A non diagonalisable, c'est-à-dire $\dim \mathrm{E}_\mu(A) = 1$.

3. $A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

V Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

Propriété 32

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable. Alors, pour tout sous-espace vectoriel F de E stable par u, l'endomorphisme induit par u sur F est lui aussi diagonalisable.

Corollaire 33

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que $\mathrm{E} = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{F}_k$ où chaque F est un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Alors u est diagonalisable si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, l'endomorphisme induit par u sur F_k est diagonalisable.

Corollaire 34

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ **diagonalisable**.
Un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement s'il est engendré par une famille de vecteurs propres pour u.

Exemple 11 Soit E de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable. Cherchons tous les sous-espaces stables par u autres que E et $\{0\}$; à savoir les droites et les plans stables. On a trois cas à considérer :

1. u a trois valeurs propres distinctes.
2. u a une valeur propre double et une valeur propre simple.
3. u a une seule valeur propre, c'est-à-dire que u est une homothétie.