

# Probabilités

## Andrey Nikolaevich Kolmogorov 1903–1987



Mathématicien russe<sup>1,2</sup>. Son apport aux mathématiques est considérable. Il a été notamment un des pionniers de la théorie moderne des probabilités.

Il a fait des avancées significatives dans des domaines aussi variés que :

- la formalisation de la théorie des probabilités,
- la théorie algorithmique de l'information,
- les systèmes dynamiques,
- la topologie.

Il a d'abord travaillé sur la logique intuitionniste et les séries de Fourier. Il a aussi étudié la turbulence et la mécanique classique.

Paru en allemand en 1933, son manuel *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*<sup>3</sup>, dans lequel il présente son axiomatisation du calcul des probabilités est la base de tous les cours modernes de probabilités ; c'est d'ailleurs la présentation de Kolmogorov qui est utilisée dans ce polycopié<sup>4</sup>. Cet ouvrage allait apporter des éléments au sixième<sup>5</sup> problème de Hilbert<sup>6</sup>, ainsi qu'une manière adaptée à traiter les processus stochastiques.<sup>7</sup>

## Table des matières

---

<sup>1</sup>En fait russe puis soviétique...

<sup>2</sup>Merci à Wikipedia et, surtout au site historique de l'université de St Andrews : « The MacTutor History of Mathematics archive » (<http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/>). Allez faire un tour et cherchez un nom au hasard...

<sup>3</sup>Des fondements de la théorie des probabilités

<sup>4</sup>La seule différence est que l'axiome 2.b et la propriété 3.2 ont des rôles échangés : l'un devenant une propriété et l'autre un axiome.

<sup>5</sup>Lors du deuxième congrès international des mathématiciens, tenu à Paris en 1900, David Hilbert (voir note suivante) présenta une liste de problèmes qui tenaient jusqu'alors les mathématiciens en échec. Il y en a 23 et certains ne sont toujours pas résolus. Le sixième est : « l'axiomatisation, fondée sur le modèle mathématique, de la physique ».

<sup>6</sup>1862–1943. Mathématicien allemand. Souvent considéré comme un des plus grands mathématiciens du XX<sup>e</sup> siècle.

<sup>7</sup>Un processus stochastique représente une évolution, discrète ou à temps continu, d'une variable aléatoire. Les marches aléatoires (pions du jeu de l'oie, mouvement brownien) sont des exemples de processus stochastiques.

<p><b>I Quelques exemples</b> <span style="float: right;"><b>2</b></span></p> <p>1 Le test de dépistage . . . . . 2</p> <p>2 Les trois jetons . . . . . 2</p> <p>3 Un jeu de dés . . . . . 2</p> <p>4 Le poivrot marcheur . . . . . 3</p> <p>5 Les anniversaires . . . . . 3</p> <p>6 Le jeu télévisé . . . . . 4</p> <p><b>II Définitions</b> <span style="float: right;"><b>4</b></span></p> <p>1 De quoi parle-t-on ? . . . . . 4</p> <p>2 Tableau de traduction . . . . . 5</p> <p>3 Règles de calcul . . . . . 5</p> <p><b>III Espaces probabilisés</b> <span style="float: right;"><b>6</b></span></p> <p>1 Tribus . . . . . 6</p> <p>2 Cachez cet espace que je ne saurais voir . . . . . 6</p> <p>3 En pratique . . . . . 7</p>	<p>4 Espace probabilisé . . . . . 7</p> <p>5 Vocabulaire . . . . . 8</p> <p>6 Propriétés . . . . . 9</p> <p><b>IV Probabilités conditionnelles</b> <span style="float: right;"><b>10</b></span></p> <p>1 Probabilité conditionnelle . . . 10</p> <p>2 Formule des probabilités totales 11</p> <p>3 Formule de Bayes . . . . . 12</p> <p><b>V Indépendance stochastique</b> <span style="float: right;"><b>12</b></span></p> <p>1 Indépendance de deux événements . . . . . 12</p> <p>2 Indépendance d'une famille d'événements . . . . . 13</p> <p><b>VI Complément : produits d'espaces probabilisés</b> <span style="float: right;"><b>14</b></span></p> <p>1 Deux espaces . . . . . 14</p> <p>2 Produits quelconques . . . . . 14</p>
---	--

## I Quelques exemples

### 1 Le test de dépistage

Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsque le sujet est effectivement atteint. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif? Comment améliorer ce résultat ?

### 2 Les trois jetons

Supposons que je dispose de trois jetons indiscernables au toucher et dont la tranche est de couleur noire. Supposons de plus qu'un de ces jetons à ses deux faces blanches, le second ses deux faces noires et le dernier une face noire, une face blanche. Je mets les trois jetons dans un sac, le secoue et en tire un jeton que je pose sur la table. La face visible est blanche. L'autre face a-t-elle plus de chance d'être noire, blanche ou est-ce indifférent ?

### 3 Un jeu de dés

On dispose de trois dés équilibrés :

- Un dé blanc avec trois faces marquées d'un point rouge et trois faces marquées d'un point vert.
- Un dé vert avec deux faces marquées d'un point blanc, deux marquées d'un point vert et deux d'un point rouge.
- Un dé rouge avec deux faces marquées d'un point blanc, trois d'un point vert et une d'un point rouge.

Au premier tout on prend un dé au hasard. À chaque étape on jette un dé puis, pour l'étape suivante on prend le dé correspondant à la couleur choisie.

On note  $B_n$ ,  $V_n$  et  $R_n$  les événements « on utilise le dé blanc (respectivement vert ou rouge) à l'étape  $n$  ». On note aussi  $b_n$ ,  $v_n$  et  $r_n$  les probabilités respectives de  $B_n$ ,  $V_n$  et  $R_n$ .

1. Déterminer une relation entre  $(b_{n+1}, v_{n+1}, r_{n+1})$  et  $(b_n, v_n, r_n)$ .
2. Montrer qu'il existe (et la déterminer) une matrice  $A$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ r_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

## 4 Le poivrot marcheur

Robert B. est un poivrot notoire. Tous les soirs il rentre, rond comme une queue de pelle, de son bar préféré accompagné de son chien K. La route du retour est longue, longue<sup>8</sup> et pour passer le temps K s'amuse à observer à chaque pas de son maître si celui ci est du côté gauche ou droit de rue.

On note  $D_n$  (respectivement  $G_n$ ) l'événement : « Robert est à droite (respectivement à gauche) de la route au  $n^e$  pas ». Modéliser les événements suivants :

1. Robert est à droite au moins une fois à partir du 10<sup>e</sup> pas ; à partir du  $n^e$  pas.
2. Robert est à droite une infinité de fois
3. Robert est toujours à droite à partir du 10<sup>e</sup> pas ; à partir du  $n^e$  pas.
4. Robert est toujours à droite à partir d'un certain rang.

## 5 Les anniversaires

Considérons le pari suivant : je parie que deux élèves au moins de la classe ont un anniversaire le même jour. Pour corser un peu les choses, je mise 200 euros et chaque élève seulement un euro. Le pari est-il équitable ? Si non, pour qui est-il le plus favorable ?

<sup>8</sup>De ce fait on suppose qu'il faut un nombre infini de pas à Robert pour rentrer ; ce qui désole K : il préférerait être sur son coussin à lire Kant...

## 6 Le jeu télévisé

Au cours d'un jeu télévisé le candidat doit choisir une boîte parmi trois étiquetées  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Dans une des trois boîtes se trouve la clef de la voiture qu'il convoite et les deux autres sont vides.

Le candidat choisit une boîte. À ce moment là l'animateur dit :

« Vous avez une chance sur trois de gagner. Je vais ouvrir une des deux boîtes que vous n'avez pas choisie et ainsi vous dévoiler une boîte vide. Vous avez alors une chance sur deux de gagner. »

1. L'animateur a-t-il raison ?
2. Il vous propose d'échanger la boîte que vous avez choisi contre celle qui n'a pas été ouverte. Que faites-vous ?
3. On passe de trois à quatre boîtes. Que se passe-t-il ?

## II Définitions

### 1 De quoi parle-t-on ?

Pour modéliser un problème de probabilités on a besoin de formaliser un certain nombre de concepts.

- **Expérience** ou **épreuve aléatoire** : épreuve pour étudier un phénomène.
- **Événement élémentaire** ou **résultat (issue) possible** : C'est le résultat de l'épreuve aléatoire que l'on essaie de modéliser.
- **Univers des possibles** ou **univers** : Ensemble  $\Omega$  des issues possibles.
- **Événement** : Ensemble d'issues possibles.

#### EXEMPLES 1

1. Considérons l'*expérience* suivante : Au marché on mesure le poids, la couleur et la fraîcheur d'œufs de poules mis en vente.
  - Une *issue possible* sera un œuf spécifique.
  - Un événement sera, par exemple « Le poids de ces œufs est compris entre 70 et 75 grammes » (i.e. les œufs considérés sont de calibre 70–75). Si en plus on examine la couleur et la qualité de ces œufs, on pourra considérer les événements : « ces œufs sont frais du jour et pèsent entre 65 et 70 grammes », « ces œufs ne sont pas blancs » ou encore « ces œufs sont blancs ou pèsent plus de 70 grammes »...
2. Considérons l'exemple 1 du test de dépistage. La modélisation est plus délicate.
  - Une issue possible pourrait être un sujet testé.

- Des événements correspondant à l'expérience sont : « le sujet est malade » ou « le test est positif<sup>9</sup> ».

## 2 Tableau de traduction

Le vocabulaire des événements et celui des ensembles est lié. Le tableau suivant donne la traduction en vocabulaire ensembliste de quelques termes du vocabulaire probabiliste (celui des événements). Pour cela soient  $A$  et  $B$  deux événements.

vocabulaire probabiliste	théorie des ensembles
événement contraire de $A$ , noté $\bar{A}$	complémentaire de $A$
événement : « $A$ et $B$ »	$A \cap B$
événement : « $A$ ou $B$ »	$A \cup B$
« $A$ et $B$ sont incompatibles »	$A \cap B = \emptyset$
événement certain	$\Omega$ (l'univers tout entier)
événement impossible	$\emptyset$
« Si $A$ alors $B$ » ou « $A \Rightarrow B$ »	$A \subset B$
$\omega$ réalise $A$	$\omega \in A$

On a, par définition, pour une famille quelconque  $(A_i)_{i \in I}$  d'événements :

$$\omega \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff (\exists i_0 \in I, \omega \in A_{i_0}),$$

C'est à dire  $\omega$  réalise  $\bigcup_{i \in I} A_i$  si et seulement si  $\omega$  réalise au moins l'un des  $A_i$

$$\omega \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff (\forall i \in I, \omega \in A_i).$$

C'est à dire  $\omega$  réalise  $\bigcap_{i \in I} A_i$  si et seulement si  $\omega$  réalise chacun des  $A_i$

## 3 Règles de calcul

La réunion et l'intersection sont distributives l'une par rapport à l'autre. On a donc

$$A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$$

et

$$A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

<sup>9</sup>Et donc déclare le sujet malade, même s'il ne l'est pas

La négation transforme un  $\cap$  (et) en un  $\cup$  (ou) et vice-versa :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

## III Espaces probabilisés

### 1 Tribus

#### Définition 1

Soit  $\Omega$  un ensemble. On appelle *tribu* ou  $\sigma$ -*algèbre* de parties de  $\Omega$ , tout sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  tel que :

- (a)  $\Omega$  appartient à  $\mathcal{A}$ .
- (b)  $\mathcal{A}$  est stable par complémentarité, c'est-à-dire que pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\overline{A} \in \mathcal{A}$ .
- (c)  $\mathcal{A}$  est stable par réunion finie ou dénombrable.

$(\Omega, \mathcal{A})$  est alors appelé *espace probabilisable*. Les éléments de  $\mathcal{A}$  sont appelés *événements*

#### REMARQUES

1. Une réunion (ou une intersection) est dénombrable si c'est la réunion (ou l'intersection) d'une suite d'ensembles.
2. La deuxième et la troisième propriété donnent que toute intersection finie ou dénombrable d'événements est un événement.

#### EXEMPLES 2

Voici à titre d'exemples quelques tribus *fondamentales*...

1.  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$  : La plus simple !
2.  $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$  pour  $A \subset \Omega$ . La tribu *engendrée* par  $A$ .
3.  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ . La tribu des parties de  $\Omega$ .

## 2 Cachez cet espace que je ne saurais voir<sup>10</sup>

En général on se contente de mentionner la phrase : « Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probabilisé adapté à l'énoncé ». Il est *très rare* qu'on s'intéresse au contenu de  $\Omega$  ou  $\mathcal{A}$ . En fait tout ce dont on a besoin est un certain nombre d'événements clef. La tribu  $\mathcal{A}$  sera alors une tribu qui contient au moins ces événements.

<sup>10</sup>Et non « Couvrez ce sein, que je ne saurais voir »...

EXEMPLE 3 Si on observe l'exemple 4 du poivrot marcheur, la tribu devra au moins contenir tous les événements  $D_n$  et  $G_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### 3 En pratique

- lorsque  $\Omega$  est **fini** ou **dénombrable**, on considère presque toujours l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  ;
- parfois on se contente de donner des événements qui caractérisent la tribu en disant que c'est la plus petite tribu qui contient ces éléments (voir la section précédente).

REMARQUE On montre que si  $\Omega$  est dénombrable et que si  $\{\omega_k\} \in \mathcal{A}$  pour tout  $\omega_k \in \Omega$ , alors  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ .

### 4 Espace probabilisé

#### Définition 2

Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probabilisable. On appelle **probabilité sur  $\mathcal{A}$**  une application  $\mathbb{P}$  définie sur  $\mathcal{A}$  et à valeurs dans  $[0, 1]$  telle que

- (a)  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .
- (b)  $\mathbb{P}$  est  **$\sigma$ -additive** : Pour toute famille finie ou dénombrable  $(A_i)_{i \in I}$  (donc  $I \subset \mathbb{N}$ ) d'événements deux à deux **incompatibles**,  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in I} A_n\right) = \sum_{n \in I} \mathbb{P}(A_n)$

#### REMARQUES

1. En général on a  $I = \llbracket 0, n \rrbracket$  ou  $I = \mathbb{N}$ .
2. La notion de  $\sigma$ -additivité fait appel aux séries ! En effet, si  $I$  est infini, la somme  $\sum_{n \in I} \mathbb{P}(A_n)$  est (la somme d') une série.

Plus précisément, si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'événements deux à deux disjoints alors :

- (a) la série  $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$  converge ;

- (b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$ .

**Propriété 1**

Soient  $A$  et  $B$  deux événements (i.e.  $A, B \in \mathcal{A}$ )

(1)  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ . En particulier  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

(2)  $\mathbb{P}$  est une application croissante, c'est-à-dire :

$$\text{si } A \subset B \text{ alors } \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

(3)  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .

**5 Vocabulaire**

$\mathbb{P}(A) = 1$	$A$ est un événement presque (ou quasi) certain
$\mathbb{P}(A) = 0$	$A$ est un événement presque (ou quasi) impossible

REMARQUE Il est important de ne pas faire l'erreur de croire que « presque impossible = impossible ». Ceci n'est vrai que lorsque  $\Omega$  est fini ou dénombrable et que chaque événement élémentaire (de la forme  $\{\omega\}$ ) a une probabilité non nulle. Comme on le verra plus loin, dans un jeu de pile ou face avec une pièce équilibrée, la probabilité de ne cesser de jeter le côté pile est nulle, mais l'événement correspondant n'est pas impossible.

**Définition 3**

On appelle *système complet d'événements* toute partition finie ou dénombrable de  $\Omega$  formée d'éléments de  $\mathcal{A}$ . Autrement dit,  $\{A_i\}_{i \in I}$  est un système complet d'événements si et seulement si :

(a)  $I \subset \mathbb{N}$ .

(b) Pour tout  $i, j \in I$ , si  $i \neq j$  alors  $A_i \cap A_j = \emptyset$ .

(c)  $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

**Propriété 2**

Soit  $\{A_i\}_{i \in I}$  un système complet d'événements, alors :



$$(1) \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

(2) Pour tout événement  $B \in \mathcal{A}$ ,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

**REMARQUE** On peut étendre la définition et la propriété précédente aux systèmes quasi-complets. Ce sont ceux qui vérifient les points 1. et 2. de la définition 3 et le point 1. de la propriété 2

## 6 Propriétés

### **Théorème 3 (continuité monotone)**

(1) Pour toute suite croissante d'événements  $(A_n)$  de  $\mathcal{A}$  (c'est-à-dire  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \subset A_{n+1}$ ), on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(2) Pour toute suite décroissante d'événements  $(B_n)$  de  $\mathcal{A}$  (c'est-à-dire  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $B_{n+1} \subset B_n$ ), on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

### **Théorème 4 (sous additivité)**

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements alors :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^m A_n\right) \leq \sum_{n=0}^m \mathbb{P}(A_n)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

REMARQUE Il est bien entendu que si la série à termes positifs ci-dessus diverge, sa somme vaut  $+\infty$  et la propriété ci-dessus n'a pas grand intérêt...

EXEMPLE 4 Si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$  converge alors  $\mathbb{P}(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_n) = 0$ . Au fait, c'est quoi l'événement  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_n$  ?

## IV Probabilités conditionnelles

### 1 Probabilité conditionnelle

#### Définition 4

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé, et soit  $A$  un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement  $B$  de  $\mathcal{A}$ , on appelle *probabilité conditionnelle de  $B$  sachant  $A$*  et on note  $\mathbb{P}_A(B)$  ou  $\mathbb{P}(B | A)$  le nombre  $\frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$ .

#### REMARQUES

1. Pour tout événement  $A$  non quasi-impossible, l'application  $\mathbb{P}_A$  définit une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .
2. Pour aller plus loin  $\mathbb{P}_A$  définira aussi une probabilité sur  $(\Omega', \mathcal{A}')$  où  $\Omega' = A$  et  $\mathcal{A}'$  est défini par  $\mathcal{A}' = \{B \cap A / A \in \mathcal{A}\}$  (la trace dans  $A$  des événements de  $\mathcal{A}$ ).

Ces deux remarques se résument par la propriété :

#### Propriété 5

Soit  $A$  un événement de probabilité non nulle.

- (1)  $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$  pour tout  $B \in \mathcal{A}$ .
- (2)  $\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) - \mathbb{P}_A(B_1 \cap B_2)$ , pour tout  $B_1, B_2$  dans  $\mathcal{A}$ .

REMARQUE Pour un événement  $B$ , on a  $\mathbb{P}_A(B) = 0$  si et seulement si  $A \cap B$  est presque impossible, c'est à dire  $A$  et  $B$  presque sûrement incompatibles.

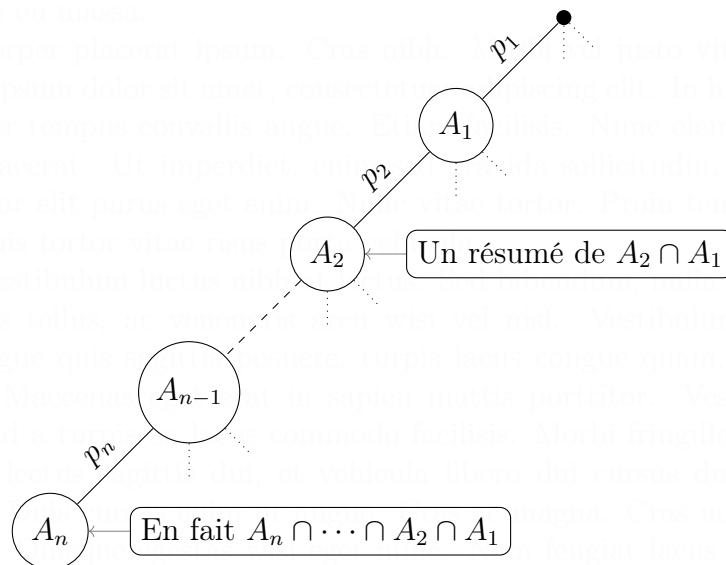
**Propriété 6 (probabilités composées)**

Pour toute famille  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  d'événements tels que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) &= \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \times \cdots \\ &\times \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \times \mathbb{P}(A_1) \end{aligned}$$

REMARQUE La dernière propriété est celle qui permet la lecture d'un arbre de probabilités où chacun des noeuds rencontré correspond à des événements de la forme :  $A_1 \cap \cdots \cap A_k$ . La probabilité  $\mathbb{P}(A_{k+1} \mid A_1 \cap \cdots \cap A_k)$  correspond à la probabilité de la branche reliant  $A_1 \cap \cdots \cap A_k$  (qui est noté  $A_k$ ) à  $A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1}$  (noté donc  $A_{k+1}$ ).



On a alors bien

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

**2 Formule des probabilités totales**

**Propriété 7**

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  un système complet d'événements de probabilités non nulles. Pour tout événement  $B$ , on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)$$

**3 Formule de Bayes****Propriété 8**

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  un système complet d'événements de probabilités non nulles, et  $B$  un événement de probabilité non nulle. Pour tout  $i_0 \in I$ , on a :

$$\mathbb{P}_B(A_{i_0}) = \frac{\mathbb{P}_{A_{i_0}}(B)\mathbb{P}(A_{i_0})}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}$$

REMARQUE L'intérêt de cette formule est d'inverser causes et conséquences. C'est elle qui est à la base de la résolution de l'exemple 1 du test de dépistage.

**V Indépendance stochastique****1 Indépendance de deux événements****Définition 5**

Deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants pour la probabilité  $\mathbb{P}$  ssi :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

**REMARQUES**

1. L'indépendance dépend de la probabilité choisie et non pas des qualités intrinsèques des événements. Néanmoins l'indépendance est souvent garantie par l'énoncé du problème. C'est-à-dire que l'énoncé permet de construire un espace probabilisé (donc événements et mesure de probabilité) qui rend  $A$  et  $B$  indépendants.

2. Une autre définition de  $A$  et  $B$  indépendants pour  $\mathbb{P}$  est  $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ . C'est-à-dire : la connaissance de  $B$  n'affecte en aucune façon la connaissance de  $A$  pour la (mesure de) probabilité  $\mathbb{P}$ .

### Propriété 9

Si  $A$  et  $B$  sont deux événements indépendants pour  $\mathbb{P}$ , alors les couples  $(A, \bar{B})$ ,  $(\bar{A}, B)$ ,  $(\bar{A}, \bar{B})$  sont des couples d'événements indépendants pour  $\mathbb{P}$ .

## 2 Indépendance d'une famille d'événements

### Définition 6

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille d'événements.

- (a) La famille  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille d'événements *mutuellement indépendants* ou *indépendants dans leur ensemble* pour la probabilité  $\mathbb{P}$  si et seulement si pour toute famille finie  $J$  d'indices de  $I$ ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

- (b) La famille  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille d'événements *deux à deux indépendants* pour la probabilité  $\mathbb{P}$  ssi  $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$  pour tout  $i \neq j$  pris dans  $I$ .

### REMARQUES

1.  $I$  est un ensemble fini ou dénombrable d'indices.
2. Mutuellement indépendants  $\Rightarrow$  deux à deux indépendants.
3. Le contraire est faux dès qu'on a 3 ou plus événements. En effet pour que  $n$  événements soient mutuellement indépendants,  $2^n - (n + 1)$  équations doivent être réalisées. Par contre pour que ces mêmes  $n$  événements soient deux à deux indépendants seulement  $n(n - 1)/2$  équations sont nécessaires.

### Propriété 10

Si la famille  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille d'événements mutuellement indépendants, alors il en est de même avec la famille  $(A'_i)_{i \in I}$  où, pour tout  $i \in I$ ,  $A'_i$  vaut  $A_i$  ou  $\bar{A}_i$ .

## VI Complément : produits d'espaces probabilisés

Ce paragraphe est là uniquement pour donner une idée. En fait, il est presque sûrement hors programme...

### 1 Deux espaces

La question est la suivante : disposant de deux espaces probabilisés  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et  $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ , comment fabriquer un espace probabilisé avec  $\tilde{\Omega} = \Omega \times \Omega'$  qui conserve les propriétés de  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{P}'$  ?

La construction est la suivante :

- la tribu : on définit la tribu  $\tilde{\mathcal{A}}$  sur  $\tilde{\Omega}$  comme étant la plus petite (au sens de l'inclusion) tribu contenant les événements du type  $A \times A'$  où  $A \in \mathcal{A}$  et  $A' \in \mathcal{A}'$  (des pavés de  $\Omega \times \Omega'$ ). En fait les événements que l'on considérera<sup>11</sup> seront des types suivants :
  1. les pavés  $A \times A'$  (où, bien entendu,  $A \in \mathcal{A}$  et  $A' \in \mathcal{A}'$ ),
  2. les réunions (finies ou dénombrables) disjointes<sup>12</sup> de pavés,
  3. les intersections (resp. réunions) de suites décroissantes (resp. croissantes) d'événements définis comme au 2.
- la probabilité : on définit  $\tilde{\mathbb{P}}$  en partant des pavés et en disant que

$$\tilde{\mathbb{P}}(A \times A') = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}'(A').$$

puis on étend la définition de  $\tilde{\mathbb{P}}$  pour que cela soit une probabilité en imposant la  $\sigma$ -additivité.

Un point important de la construction est que elle garantit l'indépendance de certains types d'événements. En effet, si on considère, pour  $A \in \mathcal{A}$  et  $B \in \mathcal{A}'$ , les événements  $\tilde{A} = A \times \Omega'$  et  $\tilde{B} = \Omega \times B$ , on a<sup>13</sup>

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{\mathbb{P}}(A \times B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}'(B) = \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{A})\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{B}).$$

### 2 Produits quelconques

La question est plus subtile. Supposons qu'on ait une famille  $((\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i))_{i \in I}$  d'espaces probabilisés. Deux cas sont généralement considérés :

*I* EST FINI L'exemple le plus simple étant  $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ . Ce cas est une extension directe de la section précédente.

<sup>11</sup>On ne se pose pas la question de savoir si on décrit ainsi tous les événements de  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

<sup>12</sup>On peut se restreindre à disjoint : l'intersection de deux pavés est soit un pavé soit impossible.

<sup>13</sup>On pourrait lire  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  et  $\tilde{A} \cap \tilde{B}$  comme les événements " $A_1$ ", " $B_2$ " et " $A_1 B_2$ "...

*I* EST DÉNOMBRABLE Dans ce cas on peut supposer  $I = \mathbb{N}$ . Ici les choses se corsent : les issues possibles sont des suites. Plus précisément

$$\tilde{\Omega} = \prod_{n=0}^{+\infty} \Omega_n$$

et une issue possible est de la forme

$$\tilde{\omega} = (\omega_k) \text{ où } \forall k \in \mathbb{N}, \omega_k \in \Omega_k$$

La tribu qu'on considère est la plus petite tribu  $\tilde{\mathcal{A}}$  telle que

1. Les « cylindres<sup>14</sup> » de la forme

$$A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_n \times \prod_{k=n+1}^{\infty} \Omega_k$$

sont dans  $\tilde{\mathcal{A}}$ , où  $A_0, \dots, A_n$  sont des événements de  $\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_n$ ,

2. les réunions (finies ou dénombrables) disjointes<sup>15</sup> de cylindres,
3. les intersections (resp. réunions) de suites décroissantes (resp. croissantes) d'événements définis comme au 2.

La probabilité  $\tilde{\mathbb{P}}$  est construite comme dans le cas d'un couple en imposant

$$\tilde{\mathbb{P}}(A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_n \times \prod_{k=n+1}^{\infty} \Omega_k) = \mathbb{P}_0(A_0) \times \mathbb{P}_1(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}_n(A_n).$$

<sup>14</sup>Un cylindre est un événement ou on n'observe que les termes d'ordre 0 à  $n$  d'une issue possible.

<sup>15</sup>On peut se restreindre à disjoint : l'intersection de deux cylindres est un cylindre ou l'événement impossible...