Probabilités — Exemples détaillés

I Que fait-on ?

Le but de ce polycopié est de (re)démarrer en probabilités par l'exemple. Il est divisé en deux parties

- La première que vous êtes entrain de lire qui vous donne quatre énoncés simples. Lisez-les et cherchez à répondre aux questions posées.
- La deuxième partie contient les corrigés détaillés de ces exercices. N'y touchez pas avant d'avoir vraiment essayé[1].

II Les exercices

1 Le test de dépistage

Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsque le sujet est effectivement atteint. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ?
2. Comment améliorer ce résultat ?

2 Les trois jetons

Supposons que je dispose de trois jetons indiscernables au toucher et dont la tranche est de couleur noire. Supposons de plus qu'un de ces jetons à ses deux faces blanches, le second ses deux faces noires et le dernier une face noire, une face blanche. Je mets les trois jetons dans un sac, le secoue et en tire un jeton que je pose sur la table.
La face visible est blanche. L'autre face a-t-elle plus de chance d'être noire, blanche ou est-ce indifférent ?

3 Un jeu de dés

On dispose de trois dés équilibrés :

- Un dé blanc avec trois faces marquées d'un point rouge et trois faces marquées d'un point vert.

[1] Non mais VRAIMENT !!!

- Un dé vert avec deux faces marquées d'un point blanc, deux marquées d'un point vert et deux d'un point rouge.
- Un dé rouge avec deux faces marquées d'un point blanc, trois d'un point vert et une d'un point rouge.

Au premier tout on prend un dé au hasard. À chaque étape on jette un dé puis, pour l'étape suivante on prend le dé correspondant à la couleur choisie.
On note B_n, V_n et R_n les événements « on utilise le dé blanc (respectivement vert ou rouge) à l'étape n ». On note aussi b_n, v_n et r_n les probabilités respectives de B_n, V_n et R_n.

1. Déterminer une relation entre $(b_{n+1}, v_{n+1}, r_{n+1})$ et (b_n, v_n, r_n).
2. Montrer qu'il existe (et la déterminer) une matrice A telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ r_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

4 Le poivrot marcheur

Robert B. est un poivrot notoire. Tous les soirs il rentre, rond comme une queue de pelle, de son bar préféré accompagné de son chien K. La route du retour est longue, longue et pour passer le temps K s'amuse à observer à chaque pas de son maître si celui ci est du côté gauche ou droite de rue.
Modéliser les événements suivants :

1. Robert est à droite au moins une fois à partir du 10^{e} pas ; à partir du n^{e} pas.
2. Robert est à droite une infinité de fois
3. Robert est toujours à droite à partir du 10^{e} pas ; à partir du n^{e} pas.
4. Robert est toujours à droite à partir d'un certain rang.

III Le test de dépistage

1 L'énoncé

Une maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsque le sujet est effectivement atteint. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ?
2. Comment améliorer ce résultat ?

2 L'analyse de l'énoncé

a Événements

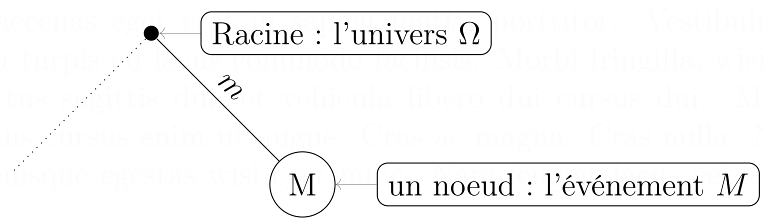
L'énoncé donne quatre événements :

- M qui désigne les sujets malades et son contraire $S = \overline{M}$ qui désigne les sujets sains ;
- P qui désigne le fait que le test réponde positif (et donc dise que le sujet est malade) et son contraire $N = \overline{P}$ qui désigne un résultat négatif.

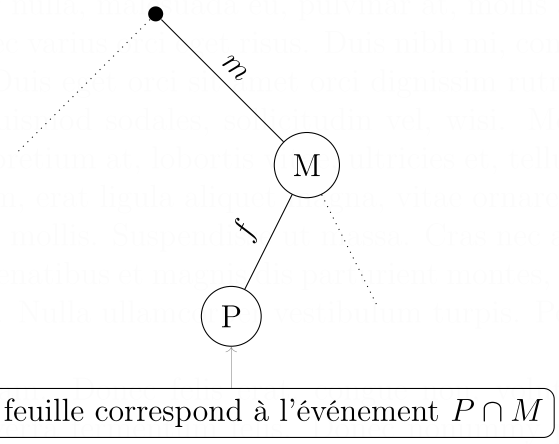
b Les probabilités

L'énoncé donne trois probabilités :

- La probabilité $m = 0{,}001$ qu'un sujet soit malade. On a donc $m = \mathbb{P}(M)$.



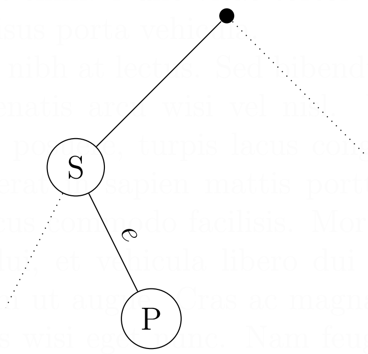
- La probabilité $f = 0{,}99$ que si un sujet est malade le test réponde positif. Sur un graphe c'est la probabilité de passer par la branche qui relie le noeud M à la feuille P (qui représente en fait l'événement $P \cap M$).



À l'aide des informations déjà données, on peut calculer la probabilité de l'événement $P \cap M$: c'est la probabilité d'arriver sur la feuille P en passant par la feuille M. Pour la calculer, on calcule le produit des probabilités de chacune des branches empruntées. On obtient donc :

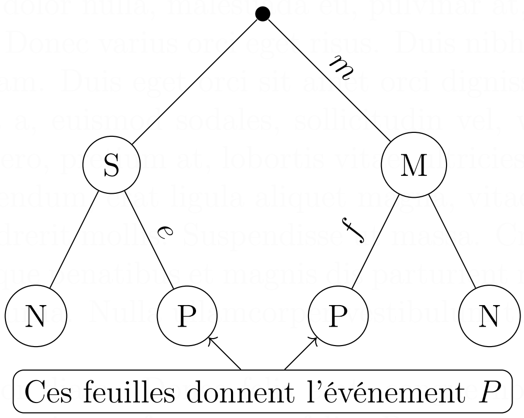
$$\mathbb{P}(P \cap M) = m \times f.$$

- La probabilité $e = 0{,}002$ que le test réponde faussement positif si un sujet sain. Sur un graphe c'est la probabilité de passer par la branche qui relie le noeud S à la feuille P

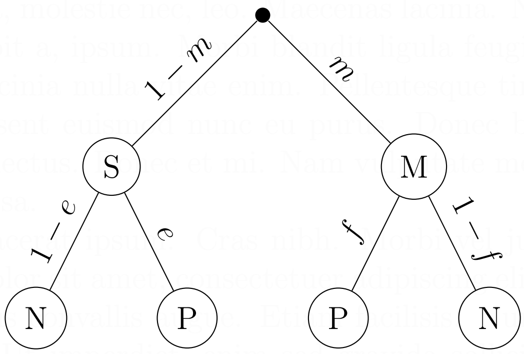


c L'arbre

Rassemblons les informations de l'énoncé à dans un arbre



Cet arbre est incomplet : il manque des probabilités. Rajoutons-les :



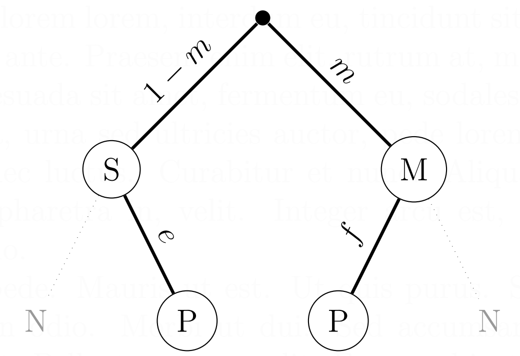
La règle étant : la somme des probabilités des branches partant d'un noeud doit faire 1.

3 Résolution

L'énoncé demande de calculer la probabilité d'être malade *sachant* que le résultat du test est positif. On demande donc :

$$\mathbb{P}_P(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap P)}{\mathbb{P}(P)}$$

Tout d'abord, calculons la probabilité que le résultat du test soit positif. Lisons l'arbre en mettant en gras les branches aboutissant à une feuille marquée P :



La probabilité d'aboutir à une feuille est le produit des probabilités des branches qui y mènent. L'événement P apparait deux fois en tant que feuille sur l'arbre : sa probabilité est la somme des probabilités d'arriver sur une des feuilles. La lecture de l'arbre donne alors le calcul :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &= (1-m)\times e + m\times f \\ &= 0{,}002988\end{aligned}$$

La définition d'une probabilité conditionnelle donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_P(M) &= \frac{\mathbb{P}(M\cap P)}{\mathbb{P}(P)} \\ &= \frac{m\times f}{(1-m)\times e + m\times f} \\ &= 0{,}33\end{aligned}$$

Je n'ai donc qu'une seule chance sur trois d'être malade alors que le test a répondu positif !

4 Que dire ?

Observons le résultat obtenu en faisant varier la probabilité e d'un faux positif :

e	$\mathbb{P}_P(M)$
$2\cdot 10^{-3}$	0,33
$1\cdot 10^{-3}$	0,50
$5\cdot 10^{-4}$	0,66
$1\cdot 10^{-4}$	0,91

Il faut donc que cette probabilité soit faible devant m pour que le résultat positif du test devienne inquiétant !

IV Les trois jetons

1 L'énoncé

Supposons que je dispose de trois jetons indiscernables au toucher et dont la tranche est de couleur noire. Supposons de plus qu'un de ces jetons à ses deux faces blanches, le second ses deux faces noires et le dernier une face noire, une face blanche. Je mets les trois jetons dans un sac, le secoue et en tire un jeton que je pose sur la table.
La face visible est blanche. L'autre face a-t-elle plus de chance d'être noire, blanche ou est-ce indifférent ?

2 L'analyse de l'énoncé

La première chose à faire c'est de déterminer les objets donnés par l'énoncé ainsi que ceux qui sont attendus en réponse ou servent à celle-ci. Ces objets se divisent en deux catégories : les événements qui modélisent la situation et les probabilités qui s'appliquent aux événement.
Tout d'abord on détermine les événements qui sont nécessaires à la modélisation de l'énoncé.

a Évenements

On a deux catégories d'événements : ceux qui concernent le jeton tiré et ceux qui s'intéressent à la face visible qui est visible ou à celle qui est cachée. Notons :

- NN, NB et BB les évènements correspondant au tirage de chacun des trois jetons. Par exemple, l'événement NB correspond au tirage du jeton bicolore.
- N_v, N_c, B_v et B_c les événements correspondant à la couleur visible / cachée. Par exemple N_c correspond à « la face cachée du jeton est noire ».

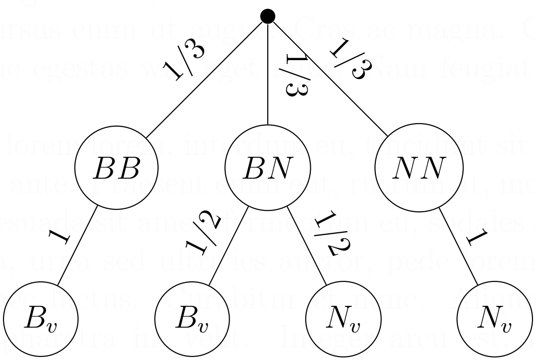
b Les probabilités

Ici peu d'informations. En fait « je mets les trois jetons dans un sac, le secoue et en tire un jeton que je pose sur la table » permet de dire :

- il y a équiprobabilité dans le tirage des jetons ;
- il y a équiprobabilité dans le tirage de la face visibe.

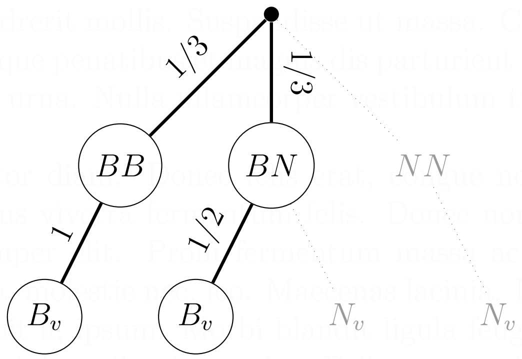
c Un graphe

Sur ce graphe qui est un arbre de probabilités on indique le jeton tiré et la face visible. La face cachée se déterminant par élimination.



3 Résolution

L'énoncé demande de calculer les probabilités que la face cachée soit noire ou blanche *sachant* que la face visible est blanche. On veut donc calculer $\mathbb{P}_{B_v}(B_c)$ et $\mathbb{P}_{B_v}(N_c)$
Tout d'abord, calculons la probabilité que la face visible soit blanche. Lisons l'arbre en ne tenant compte que les feuilles B_v :



La lecture de l'arbre permet alors de faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_v) &= 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

La définition d'une probabilité conditionnelle donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{B_v}(B_c) &= \frac{\mathbb{P}(B_c \cap B_v)}{\mathbb{P}(B_v)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(BB)}{\mathbb{P}(B_v)} \\ &= \frac{1/3}{1/2} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

V Un jeu de dés

1 L'énoncé

On dispose de trois dés équilibrés :

- Un dé blanc avec trois faces marquées d'un point rouge et trois faces marquées d'un point vert.
- Un dé vert avec deux faces marquées d'un point blanc, deux marquées d'un point vert et deux d'un point rouge.

- Un dé rouge avec deux faces marquées d'un point blanc, trois d'un point vert et une d'un point rouge.

Au premier tout on prend un dé au hasard. À chaque étape on jette un dé puis, pour l'étape suivante on prend le dé correspondant à la couleur choisie.
On note B_n, V_n et R_n les événements « on utilise le dé blanc (respectivement vert ou rouge) à l'étape n ». On note aussi b_n, v_n et r_n les probabilités respectives de B_n, V_n et R_n.

1. Déterminer une relation entre $(b_{n+1}, v_{n+1}, r_{n+1})$ et (b_n, v_n, r_n).
2. Montrer qu'il existe (et la déterminer) une matrice A telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ r_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

2 L'analyse de l'énoncé

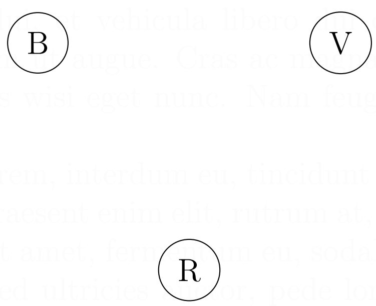
a Qu'a-t-on ?

On étudie ici ce qu'on appelle une marche aléatoire[2]. En effet à chaque étape on a trois états possibles : dé blanc (noté B), dé vert (noté V) ou dé rouge (noté R). Les règles du jeu nous font passer d'un état à un autre.

b Un graphe

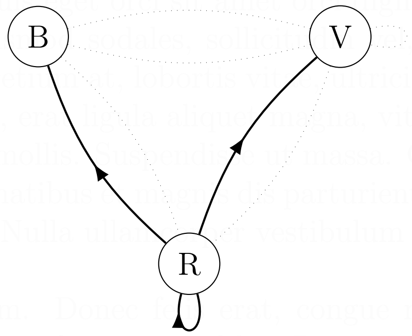
Ici tout est simple : les règles n'évoluent pas au cours du temps et on peut décrire l'évolution par un graphe.
Il est construit à l'aide des règles suivantes :

- On commence par inscrire les états en les entourant :

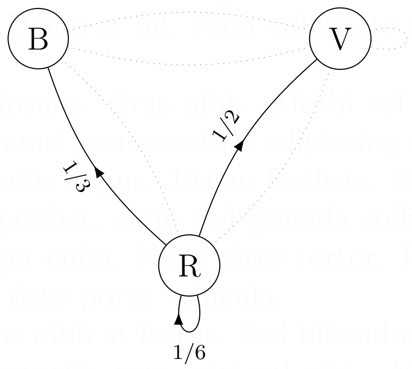


[2] En temps discret et espace d'états fini...

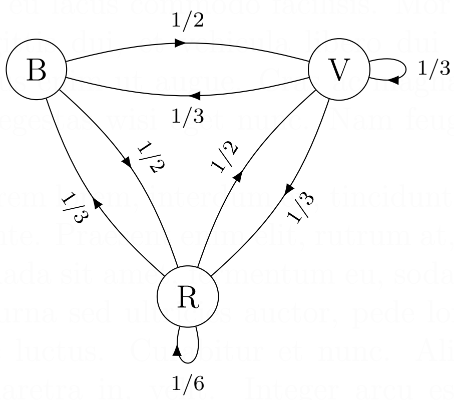
- D'un état partent autant de flèches qu'il y à de choix. Par exemple quand on à le dé rouge (état R) on a trois choix : rester en R, ou passer en B ou V.



- Sur chaque flèche on note la probabilité de passer d'un état à un autre. La somme des probabilités des flèches partant d'un état doit faire 1. En continuant l'exemple précédent on a :



Le graphe final qu'on obtient est :



3 Résolution

1. Lisons le graphe. Les probabilités indiquées sur les flèches donne les probabilités de passer d'un état à un autre. Ce sont des probabilités conditionnelles. Par exemple l'énoncé permet de dire que :

$$\mathbb{P}_{R_n}(V_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

C'est à dire que la probabilité de jouer au coup $n+1$ avec le dé vert sachant qu'au coup n on a le dé rouge est $1/2$.

Pour calculer $v_{n+1} = \mathbb{P}(V_{n+1})$, on observe les flèches qui arrivent sur l'état V et on obtient :

$$\begin{aligned} v_{n+1} = \mathbb{P}(V_{n+1}) &= \mathbb{P}_{B_n}(V_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{V_n}(V_{n+1})\mathbb{P}(V_n) + \mathbb{P}_{R_n}(V_{n+1})\mathbb{P}(R_n) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(V_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(R_n) \\ &= \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{2}r_n \end{aligned}$$

De la même façon on obtient :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{3}r_n \\ r_{n+1} &= \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{6}r_n \end{aligned}$$

2. On voit donc que :

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ v_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

Par récurrence, on montre alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ r_n \end{pmatrix} = A^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ v_1 \\ r_1 \end{pmatrix}$$

Ce qui est exactement le résultat demandé.

VI Le poivrot marcheur

1 L'énoncé

Robert B.[3] est un poivrot notoire. Tous les soirs il rentre, rond comme une queue de pelle, de son bar préféré accompagné de son chien K.[4] La route du retour est longue, longue et

[3] C'est le mari de Raymonde B. née. G.

[4] Il lit Kant. Si maintenant vous ne savez pas de qui je parle, alors là, je ris !

pour passer le temps K s'amuse à observer à chaque pas de son maître si celui ci est du côté gauche ou droite de rue.
Modéliser les événements suivants :

1. Robert est à droite au moins une fois à partir du 10^e pas ; à partir du n^e pas.
2. Robert est à droite une infinité de fois
3. Robert est toujours à droite à partir du 10^e pas ; à partir du n^e pas.
4. Robert est toujours à droite à partir d'un certain rang.

2 L'analyse

Dans cet énoncé il manque un certain nombre d'informations. Complétons donc ce qui manque :

- Notons $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisé adapté à l'exercice.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons D_n (respectivement G_n) l'événement : « Robert est à droite au n^e pas (respectivement à gauche) ».

3 La résolution

1. Robert est à droite au moins une fois à partir du 10^e pas si et seulement si D_{10} ou D_{11} ou ... sont réalisés. Le premier événement cherché est donc :
$$U_{10} = D_{10} \cup D_{11} \cup \cdots = \bigcup_{k \geq 10} D_k$$
Le second est donc :
$$U_n = D_n \cup D_{n+1} \cup \cdots = \bigcup_{k \geq n} D_k$$
2. Dire « être à droite une infinité de fois » équivaut à dire : « à chaque pas je serai au moins une fois à droite dans le futur ». Il est donc réalisé si et seulement si U_1 et U_2 et U_3 et ... sont réalisés. L'événement cherché est donc l'intersection des précédents :
$$I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Big(\bigcup_{k \geq n} D_k\Big)$$
3. Robert est toujours à droite à partir du 10^e pas si et seulement si D_{10} et D_{11} et ... sont réalisés. Le premier événement cherché est donc :
$$T_{10} = D_{10} \cap D_{11} \cap \cdots = \bigcap_{k \geq 10} D_k$$
Le second est donc :
$$T_n = D_n \cap D_{n+1} \cap \cdots = \bigcap_{k \geq n} D_k$$

4. Dire « être à droite à partir d'un certain rang », c'est dire qu'il existe n tel que T_n soit réalisé c'est donc dire que T_1 ou T_2 ou T_3 ou ... est réalise. L'événement cherché est donc :
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (\bigcap_{k\geq n} D_k)$$

4 C'est pas demandé mais...

Être à droite à partir d'un certain rang c'est n'être à gauche qu'un nombre fini de fois. On peut donc alors modéliser « n'être à droite qu'un nombre fini de fois » par :
$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (\bigcap_{k\geq n} G_k) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (\bigcap_{k\geq n} \overline{D_k})$$

Vérifions que F est l'événement contraire de I :
$$\begin{aligned}\overline{F} &= \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (\bigcap_{k\geq n} G_k)}\\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{(\bigcap_{k\geq n} G_k)}\\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (\bigcup_{k\geq n} \overline{G_k})\\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (\bigcup_{k\geq n} D_k)\\ &= I.\end{aligned}$$