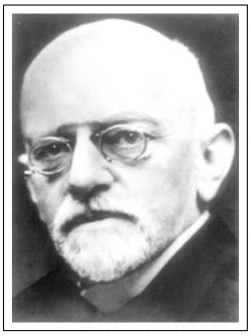
Orthogonalité

David Hilbert 1862 – 1943



Mathématicien allemand[1]. Il est souvent considéré comme un des plus grands mathématiciens du XXe siècle, au même titre que Henri Poincaré. Il a créé ou développé un large éventail d'idées fondamentales, que ce soit la théorie des invariants, l'axiomatisation de la géométrie ou les fondements de l'analyse fonctionnelle (avec les espaces de Hilbert). L'un des exemples les mieux connus de sa position de chef de file est sa présentation, en 1900, de ses fameux problèmes qui ont durablement influencé les recherches mathématiques du XXe siècle. Hilbert et ses étudiants ont fourni une portion significative de l'infrastructure mathématique nécessaire à l'éclosion de la mécanique quantique et de la relativité générale. Il a adopté et défendu avec vigueur les idées de Georg Cantor en théorie des ensembles et sur les nombres transfinis[2]. Il est aussi connu comme l'un des fondateurs de la théorie de la démonstration, de la logique mathématique et a clairement distingué les mathématiques des métamathématiques.
Parmi ses élèves on trouve : Emanuel Lasker, Emmy Noether, Hermann Weyl et Ernst Zermelo.

Table des matières

Les savoir-faire

- Connaître la notion de produit scalaire.
- Savoir reconnaître une situation où il faut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Savoir reconnaître et utiliser les produits scalaires canoniques.

[1] Merci a Mactutor (http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/) pour la biographie et la photographie.

[2] Très grossièrement : un nombre ordinal (comme premier, second, troisième) est transfini s'il est... infini. C'est à dire s'il désigne une position infinie dans une suite de nombres. En gros utiliser un transfini c'est essayer de parler du terme ∞^e d'une suite...

- Comprendre la notion d'othogonalité dans un préhilbertien.
- Savoir quand on peut parler de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel : elle existe à condition que ce sous-espace admette un supplémentaire orthogonal.
- Comprendre l'utilité des bases orthonormées.
- Savoir utiliser la projection orthogonale dans certains problèmes de minimisation.
- savoir utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt.
- Savoir exprimer une forme linéaire à l'aide d'un produit scalaire.

I Espaces préhilbertiens

Pour mémoire : on répète le cours de première année...

Définition 1 (produit scalaire réel)

On appelle *produit scalaire réel* sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E toute *forme bilinéaire symétrique définie positive* sur E. C'est-à-dire toute forme bilinéaire symétrique φ vérifiant en plus :

(a) $\forall x \in \mathrm{E}$, $\varphi(x,x) \geq 0$ (φ *positive*)

(b) $\forall x \in \mathrm{E}$, $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = \vec{0}$ (φ *est définie*)

Définition 2 (espace préhilbertien)

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est un espace *préhilbertien réel*.

Exemples 1

1. Produit scalaire canonique sur $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$: $\langle x\,,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.
2. Produit scalaire canonique sur $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\langle X\,,Y\rangle = X^{\mathsf{T}}Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.
3. Extension : produit scalaire canonique sur $\mathrm{E} = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: $\langle A\,,B\rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}B)$.
4. $\mathrm{E} = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\langle f\,,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)\,\mathrm{d}t$ où w est strictement positive sur $[a,b]$.
5. Extension[3] du cas précédent à $\mathrm{E} = \left\{f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \mid f^2 w \text{ intégrable sur } I\right\}$.
6. $\ell^2(\mathbb{R})$.

[3] À savoir refaire : la stabilité par la combinaison linéaire de E est un MUST !

Définition 3 (espace euclidien)

On appelle *espace euclidien* tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

À partir de maintenant, sauf mention contraire, E est un espace préhilbertien muni du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

II Norme associée à un produit scalaire

Propriété 1 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous x, y de E :

$$\langle x \mid y \rangle^2 \leq \langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle$$

De plus $\langle x \mid y \rangle^2 = \langle x \mid x \rangle \langle y \mid y \rangle$ si et seulement si x et y sont colinéaires.

Propriété 2 (norme associée à un produit scalaire)

L'application $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ est une norme sur E. C'est la *norme de* E *associée au produit scalaire* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

Et les formules de polarisation, du parallélogramme...

Propriété 3 (polarisation)

Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien alors pour tous vecteurs x et y :

(1) $\langle x \mid y \rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$.

(2) $\langle x \mid y \rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.

(3) $\langle x \mid y \rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.

Propriété 4 (identité du parallélogramme)

Pour tous x, y de E on a :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 .$$

III Orthogonalité

1 Généralités

Définition 4

Deux vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* si et seulement si leur produit scalaire $\langle x \mid y\rangle$ est nul. On le note $x \perp y$.

Définition 5

Deux sous-espaces F et G de E sont dits *orthogonaux* si et seulement si pour tous $x \in \mathrm{F}$, $y \in \mathrm{G}$, on a $x \perp y$. On le note $\mathrm{F} \perp \mathrm{G}$.

Propriété 5

$\mathrm{F} \perp \mathrm{G}$ si, et seulement si les vecteurs d'une famille génératrice de F sont orthogonaux à ceux d'une famille génératrice de G

Remarque Souvenons-nous qu'une base est une famille génératrice particulière.

Propriété 6 (orthogonal d'une partie)

Soit A une partie de E. Alors l'ensemble

$$A^{\perp} = \{x \in \mathrm{E} \mid \forall a \in A,\ \langle a \mid x\rangle = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E : *l'orthogonal* de A.

Propriété 7

On a toujours

- $\mathrm{E}^{\perp} = \left\{\vec{0}\right\}$, c'est-à-dire si $u \in \mathrm{E}$ est tel que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\langle u \mid x\rangle = 0$ alors $u = \vec{0}$.
- $\left\{\vec{0}\right\}^{\perp} = \mathrm{E}$.
- $A^{\perp} = (\mathrm{vect}\,\{A\})^{\perp}$

Exemple 2 Résoudre : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(BM)$.

Propriété 8

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- Si $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$ alors $\mathrm{G}^{\perp} \subset \mathrm{F}^{\perp}$.
- $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^{\perp} = \left\{\vec{0}\right\}$.

- $\mathrm{F} \subset \left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp}$.

Définition 6 (famille orthogonale)

Une famille $\left(x_i\right)_{i \in I}$ de vecteurs de E est *orthogonale* si les vecteurs de cette famille sont deux à deux orthogonaux. C'est-à-dire si :

$$\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j.$$

Propriété 9

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Propriété 10 (Pythagore)

Si $\left(x_i\right)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille orthogonale de vecteurs de E alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2 .$$

Définition 7

1. Un vecteur x de E est dit *normé* ou *unitaire* si et seulement si $\|x\| = 1$.
2. Une famille $\left(x_i\right)_{i \in I}$ de vecteurs de E est *orthonormée* ou *orthonormale* si et seulement si elle est orthogonale et tout ses vecteurs sont unitaires.

Propriété 11 (somme directe orthogonale)

La somme G d'une famille finie $\left(\mathrm{F}_i\right)_{1 \leq i \leq p}$ de sous-espaces deux à deux orthogonaux est directe.
Cette somme se note alors $\overset{\perp}{\bigoplus\limits_{1 \leq i \leq p}} \mathrm{F}_i$ et on l'appelle *somme directe orthogonale de la famille* $\left(\mathrm{F}_i\right)_{1 \leq i \leq p}$.

2 En dimension finie

Dans cette section, sauf mention contraire, E est un espace euclidien de dimension n muni du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

Théorème 12 (procédé de Gram-Schmidt)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \varepsilon_k \in \operatorname{vect}\{e_1, \dots, e_k\}\,.$$

Exemples 3

1. $\mathrm{E} = \mathbb{R}_m[X]$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Il existe une[4] base orthonormée $(P_n)_{n \in [\![0, m]\!]}$ de $\mathbb{R}_m[X]$ telle que pour tout $n \leq$, $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et le coefficient dominant de P_n est strictement positif.
2. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. Orthonormaliser la famille (u_1, u_2) avec $u_1 = (1, -1, 1, 1)$, $u_2 = (5, 1, -3, 3)$.

Propriété 13 (coordonnées d'un vecteur)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, alors :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \mid x \rangle\, e_k$$

Corollaire 14

Avec les mêmes hypothèses :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle x \mid y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_k \rangle \langle e_k \mid y \rangle$$

Propriété 15

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. La matrice M de f relativement à $\mathcal{B}$ a pour coefficient général $m_{i,j} = \langle e_i \mid f(e_j) \rangle$

Théorème 16 (représentation d'une forme linéaire)

Pour toute forme linéaire φ sur E il existe un unique vecteur $a \in \mathrm{E}$ tel que :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \varphi(x) = \langle a \mid x \rangle\,.$$

3 Supplémentaires orthogonaux

[4] On verra plus tard qu'elle est unique.

Définition 8 (supplémentaire orthogonal)

Si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus^{\perp} \mathrm{G}$ alors on dit que F et G sont *supplémentaires orthogonaux*. On dit aussi que G est un supplémentaire orthogonal de F (et vice-versa).

Théorème 17

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors $\mathrm{F}^{\perp}$ est l'unique supplémentaire orthogonal de F.
On a aussi :

$$\left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{F}$$

Si, de plus, E est de dimension finie alors :

$$\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{F}^{\perp})$$

4 Projection orthogonale, distance à un sous-espace

Définition 9 (projecteur orthogonal)

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Le projecteur d'image F et de noyau $\mathrm{F}^{\perp}$ est le projecteur orthogonal sur F.

Remarque Il s'agit aussi de la projection sur F de direction $\mathrm{F}^{\perp}$.

Exemple 4 $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec le produit scalaire canonique. Le projecteur orthogonal p_{F} sur $\mathrm{F} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est tel que $p_{\mathrm{F}}(A) = \frac{1}{2}(A + A^{\mathsf{T}})$.

Propriété 18

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et p le projecteur orthogonal sur F. Pour tout x de E on a :

(1) $x - p(x) \in \mathrm{F}^{\perp}$;

(2) $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$;

(3) $\|p(x)\| \leq \|x\|$ avec égalité ssi $x \in \mathrm{F}$.

Corollaire 19 (distance à un sous-epace)

Pour tout x de E il existe un unique vecteur $z \in \mathrm{F}$ tel que :

$$d(x, \mathrm{F}) = \min\left\{\|x - y\| \mid y \in \mathrm{F}\right\} = \|x - z\|$$

et ce vecteur est $z = p(x)$.

Propriété 20

Si F admet pour base orthonormée $(e_1, \dots, e_r)$ alors le projecteur orthogonal p sur F est tel que :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ p(x) = \sum_{k=1}^{r} \langle e_k \mid x \rangle\, e_k.$$

Exemples 5

1. Suite de l'exemple 3.2. Calculer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal p sur $\mathrm{F} = \operatorname{vect}\{u_1, u_2\}$.
2. Calculer $\gamma = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(x^2 \ln(x) - ax^2 - bx\right)^2 \mathrm{d}x$.

Propriété 21 (inegalité de Bessel)

Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une famille orthonormée de E alors :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \sum_{k=1}^{r} \langle e_k \mid x \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Exemple 6 Soit φ une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $k \geq 1$, on pose $a_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$. La série de terme général a_k^2 $(k \geq 1)$ converge absolument.

5 Symétries orthogonales

Définition 10

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. La *symétrie orthogonale* par rapport à F est est la symétrie par rapport à F et de direction $\mathrm{F}^\perp$.
Si F est un hyperplan, on dira que cette symétrie est une *réflexion*.

Propriété 22

Si p_F, $p_{\mathrm{F}^\perp}$ et s_F désignent respectivement le projecteurs orthogonaux sur F, $\mathrm{F}^\perp$ ainsi que la symétrie orthogonale par rapport à F alors

$$s_\mathrm{F} = 2p_\mathrm{F} - \mathrm{Id}_\mathrm{E} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - 2p_{\mathrm{F}^\perp}.$$

Exemple 7 Déterminer p_F, $p_{\mathrm{F}^\perp}$ et s_F quand $\mathrm{F} = \operatorname{vect}\{w\}^\perp$.